D-MATH
Prof. Dr. S. Zerbes

Lineare Algebra II

FS 2024

Musterlösung Serie 16

Eigenvektoren/-werte

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

1. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ aus Serie 15 Übung 2.

   (a) Bestimme die Eigenräume den Eigenwerten von A.

   (b) Bestimme die algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts von A.

   Lösung:

   (a) Sie haben auf dem vorherigen Übungsblatt berechnet, dass

$$\mathrm{char}_A(X) = (X-1)^2(X-2).$$

   Daraus folgerten Sie, dass die Eigenwerte von A gegeben sind durch $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := 2$. Wir haben

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = \ker(A - \lambda_1 I_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Nach einer kurzen Zeilenreduktion finden wir

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   Für λ_2 haben wir

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_2) = \ker(A - \lambda_2 I_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Unter Verwendung eines ähnlichen Verfahrens erhalten wir

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Die arithmetische Vielfachheit ist die Vielfachheit der Eigenwerte als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Deshalb ist die arithmetische Vielfachheit von λ_1 gleich 2 und von λ_2 gleich 1. Die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Eigenraumes. Wie oben berechnet, haben sowohl λ_1 als auch λ_2 eine geometrische Vielfachheit von 1.

2. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ und überprüfe, ob die Matrizen diagonalisierbar sind. Wenn sie es sind, finde die Basiswechselmatrix, die sie in eine Diagonalmatrix umwandelt.

   (a) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $C := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   (a) Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

und damit die Eigenwerte 2 und 3 , jeweils mit der arithmetischen Vielfachheit 1. Die Eigenräume $E_{\lambda,A}$ zum Eigenwert λ sind

$$\mathrm{Eig}_2(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_3(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da für jeden Eigenwert von A die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt, ist A diagonalisierbar. Sei

$$S_A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann haben wir

$$S_A^{-1} A S_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Denken Sie daran, dass die Eigenvektoren einer diagonalisierbaren Matrix $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bilden, bezüglich der A diagonal ist.

(b) Die Matrix B hat das charakteristische Polynom

$$\mathrm{char}_B(X) = X^3 - 5X^2 + 2X + 8 = (X-4)(X-2)(X+1).$$

und damit die Eigenwerte 4,2,-1, jeweils mit der arithmetischen Vielfachheit 1. Die Eigenräume sind

$$\mathrm{Eig}_4(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_2(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_{-1}(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da für jeden Eigenwert von B die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt, ist B diagonalisierbar. Betrachte

$$S_B := \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass

$$S_B^{-1} B S_B = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Matrix C hat das charakteristische Polynom

$$\mathrm{char}_C(X) = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4 = (X-1)(X+1)(X-2)^2.$$

und damit die Eigenwerte 1, -1, 2 mit den jeweiligen arithmetischen Vielfachheiten 1, 1, 2. Die Eigenräume sind

$$\mathrm{Eig}_1(C) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_{-1}(C) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_2(C) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Eigenwert 2 hat arithmetische Vielfachheit 2, aber geometrische Vielfachheit 1. Die Matrix C ist also nicht diagonalisierbar.

3. Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}(V)$. Nehme an, dass $f^2 = \mathrm{id}$ ist und, dass -1 kein Eigenwert von f ist. Zeige, dass $f = \mathrm{id}$.

   Lösung: Beachten Sie, dass jeder Vektor in V geschrieben werden kann als

$$v = \frac{1}{2}(v + fv - fv + v).$$

   Einerseits haben wir,

$$(f - \mathrm{id})(v + fv) = f^2 v - v = 0,$$

da $f^2 = \mathrm{id}$. Andererseits haben wir,

$$(f + \mathrm{id})(v - fv) = v - f^2 v = 0.$$

Daher gilt als Vektorraum,

$$V = \ker(f - \mathrm{id}) + \ker(f + \mathrm{id}).$$

Da -1 kein Eigenwert von f ist, gilt

$$\ker(f - (-1)\mathrm{id}) = \ker(f + \mathrm{id}) = \{0\}.$$

Wir schließen, dass $V = \ker(f - \mathrm{id})$ ist, d.h. für alle $v \in V$ gilt

$$fv - v = 0,$$

was impliziert, dass $f = \mathrm{id}$.

4. Sei V ein endlichdimensional $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{Hom}(V)$, und $v \in V$ mit $v \neq 0$. Sei $p \in \mathbb{K}[x]$ ein nichttriviales Polynom minimalen Grades, sodass $p(T)v = 0$. Zeige, dass jede Nullstelle von p ein Eigenwert von T ist.

   Lösung: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von p. Mit anderen Worten, p faktorisiert sich als $(x - \lambda)q(x)$ in $\mathbb{K}[x]$. Durch Annahme haben wir dann

   $$0 = p(T)v = (T - \lambda\mathrm{id})q(T)v.$$

   Angenommen, zum Widerspruch, dass λ kein Eigenwert von T ist. Dann ist $T - \lambda\mathrm{id}$ injektiv, also folgt aus der obigen Gleichung, dass

   $$q(T)v = 0.$$

   Dies widerspricht jedoch der Minimalitätsannahme über den Grad von p. Daher muss λ ein Eigenwert von p sein. Da λ eine beliebige $\mathbb{K}$-Nullstelle von p war, folgt daraus der Beweis.

5. Betrachten Sie den Raum $C^\infty(\mathbb{R})$ der glatten Funktionen über $\mathbb{R}$ und die Abbildung

   $$\begin{array}{rccc} T: & C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

   Finden Sie die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenfunktionen (dies ist ein Synonym für Eigenvektoren, wenn man in einem Raum arbeitet, dessen Elemente Funktionen sind) von T.

   Lösung: Für $\lambda \in K$ können wir eine Idee der Lösung bekommen, indem wir die lineare gewöhnliche Differentialgleichung lösen

   $$\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = \lambda f(x).$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = \lambda \\
\implies &\int \frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x}\,\mathrm{d}\, x = \int \lambda \,\mathrm{d}\, x
\end{aligned}$$

Durch Ersetzen von u durch $f(x)$ auf der linken Seite erhalten wir $\mathrm{d}\, u = \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x}\,\mathrm{d}\, x$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\, u = \lambda x + C, \quad C \in K \\
\implies &\log(u) = \lambda x + C \\
\implies &\log(f(x)) = \lambda x + C \\
\implies &f(x) = e^{\lambda x + C}.
\end{aligned}$$

Daher ist die Familie $\{f(x) = f(0)e^{\lambda x} \mid \lambda \in K\}$ eine Menge von Eigenfunktionen von T, und zumindest formal sollten Eigenfunktionen die Form $f(x) = f(0)e^{\lambda x}$ für $\lambda \in K$ haben.

Um zu überprüfen, dass dies die einzigen möglichen Lösungen sind, verwenden wir den folgenden Trick: Betrachten Sie eine Lösung f_0 der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = \lambda f(x)$ und definieren Sie die modifizierte Funktion

$$g_0(x) = e^{-\lambda x} f_0(x).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\, g_0}{\mathrm{d}\, x}(x) &= -\lambda e^{-\lambda x} f_0(x) + \lambda e^{-\lambda x} f_0(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wir schließen, dass $g_0(x)$ konstant ist, daher gilt für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$g_0(x) = g_0(0) = f_0(0) \Leftrightarrow f_0(x) = f_0(0)e^{\lambda x}.$$

6. **Wichitge Übung:**

   (a) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit f-invarianten Unterräumen V_i. Zeige, dass die algebraische bzw. geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in \mathbb{K}$ von f gleich der Summe der algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert der Endomorphismen $f|_{V_i}$ von V_i ist.

   (b) Folgere, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist für jedes i.

(c) Seien f und g Endomorphismen desselben endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass f und g *simultan diagonalisierbar* sind (das heisst, dass eine Basis aus simultanen Eigenvektoren für f und g existiert) genau dann, wenn sie miteinander kommutieren und separat diagonalisierbar sind.

Tipp: Um die Rückwärtsimplikation zu beweisen, zeigen Sie zuerst, dass jeder Eigenraum von f g-invariant ist, d.h. dass g Eigenvektoren von f auf Eigenvektoren von f *im selben Eigenraum* abbildet.

Lösung:

(a) Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ wähle eine geordnete Basis B_i von V_i. In aufsteigender Reihenfolge zusammengesetzt ergeben diese eine geordnete Basis B von V. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich B ist dann die Blockdiagonalmatrix mit Diagonalblöcken $M^{B_i}_{B_i}(f|_{V_i})$ für $1 \leqslant i \leqslant r$. Das charakteristische Polynom von f ist deshalb das Produkt der charakteristischen Polynome von $f|_{V_i}$; das heisst, es gilt

$$\mathrm{char}_f(X) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{char}_{f|_{V_i}}(X) \tag{1}$$

Für jedes $\lambda \in K$ ist daher die arithmetische Vielfachheit von λ als Eigenwert von f gleich der Summe über $1 \leqslant i \leqslant r$ der arithmetischen Vielfachheit von λ als Eigenwert von $f|_{V_i}$.

Sodann betrachte einen beliebigen Vektor $v = v_1 + \cdots + v_r$ mit allen $v_i \in V_i$. Dann gilt $f(v) = f(v_1) + \ldots + f(v_r)$ mit allen $f(v_i) \in V_i$. Da $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ eine direkte Summe ist, gilt die Gleichung

$$f(v_1) + \ldots + f(v_r) = f(v) = \lambda v = \lambda v_1 + \cdots + \lambda v_r$$

genau dann, wenn $f(v_i) = \lambda v_i$ ist für alle i. Also gilt

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}_\lambda(f|_{V_i})$$

und somit

$$\dim \mathrm{Eig}_\lambda(f) \;=\; \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Eig}_\lambda(f|_{V_i}).$$

Daher ist die geometrische Vielfachheit von λ als Eigenwert von f die Summe über $1 \leqslant i \leqslant r$ der geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert von $f|_{V_i}$.

(b) Nach einem Satz der Vorlesung ist ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt.

Aus der Formel (1) folgt, dass $\mathrm{char}_f(X)$ genau dann in Linearfaktoren zerfällt, wenn $\mathrm{char}_{f|_{V_i}}(X)$ in Linearfaktoren zerfällt für jedes i. Sodann betrachte ein beliebiges $\lambda \in K$. Dann folgt aus (a) sowie dem Umstand, dass die geometrische Vielfachheit stets $\leqslant$ der arithmetischen Vielfachheit ist, dass diese Vielfachheiten für f genau dann übereinstimmen, wenn sie für jedes $f|_{V_i}$ übereinstimmen. Also ist f genau dann diagonalisierbar, wenn jedes $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist.

(c) Angenommen f und g sind simultan diagonalisierbar. Dann sind f und g auch separat diagonalisierbar. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V bestehend aus simultanen Eigenvektoren für f und g zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respektive $\mu_1, \dots, \mu_n$. Für jedes Element $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} f\left(g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mu_i v_i = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i\right) = g\left(f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f und g kommutieren.

Umgekehrt nehmen wir an, dass f und g kommutieren und separat diagonalisierbar sind. Weil f diagonalisierbar ist, existieren Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von f mit $V = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ und $v \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ gilt wegen der Kommutativität von f und g:

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v)$$

und daher ist $g(v) \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$. Die Eigenräume von f sind somit g-invariant. Weil g diagonalisierbar ist, ist also auch $g|_{\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)}$ diagonalisierbar für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ nach Teil (b). Daher existiert eine Basis B_i von $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ aus Eigenvektoren von g. Zusammen ist damit $B := B_1 \cup \cdots \cup B_r$ eine Basis von V aus simultanen Eigenvektoren von f und g; daher sind f und g simultan diagonalisierbar.

7. Zeige für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (tatsächlich benötigen wir, dass $\mathbb{K}$ überabzählbar ist), dass $\mathbb{K}^\infty$ keine abzählbare Basis hat. Hier bezeichnet $\mathbb{K}^\infty$ die Menge der Folgen mit Elementen in $\mathbb{K}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass paarweise verschiedene Eigenwerte einer Menge linear unabhängiger Eigenvektoren entsprechen.

Lösung: Sei $\lambda \in K$ und betrachten Sie die Folge $L_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$. Wenden Sie den Verschiebungsoperator

$$\begin{array}{cccc} S: & K^\infty & \to & K^\infty \\ & (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) & \mapsto & (a_1, a_2, a_3, \dots) \end{array}$$

auf L_λ an und beobachten Sie, dass (λ, L_λ) ein Eigenwert-Eigenvektor-Paar für S ist. Daher hat S eine abzählbare Anzahl von Eigenwerten, da jeder $\lambda \in K$ einer ist.

Darüber hinaus, wie in den Vorlesungen gesehen (Satz 12.3.2. des Skripts), da diese Eigenwerte unterschiedlich sind, ist die Menge $\{L_\lambda \mid \lambda \in K\}$ linear unabhängig. Da für jede Basis $\mathcal{B}$ eine linear unabhängige Menge höchstens die Kardinalität von $\mathcal{B}$ haben muss, schließen wir, dass $\mathbb{K}^\infty$ keine abzählbare Basis zulässt.

Single Choice. Pro Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Betrachte die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T(x, y) = (41x + 7y, -20x + 74y).$$

   Welche der folgende ist wahr?

   - ✓ T is diagonalisierbar bezüglich der Basis $\{(1, 4), (7, 5)\}$.
   - ○ T is diagonalisierbar bezüglich der Basis $\{(4, 1), (5, 7)\}$.
   - ○ T ist nicht diagonalisierbar.