Musterlösung Serie 17

Diagonalisierbarkeit, Minimale Polynom

1. Beweise Lemma 14.2.2. des Skripts.

   Lösung: Sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Bezeichne $u = u_1 e_1 + \cdots + u_\ell e_\ell$ und $w = w_{\ell+1} e_{\ell+1} + \cdots w_n e_n$. Bezüglich $\mathcal{B}$ haben wir

$$T_C(v) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_\ell \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{\ell+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) = \widetilde{T_A}(u) + \widetilde{T_B}(w),$$

   wobei $\widetilde{T_A}$ das Element von $\mathrm{End}(V)$ bezeichnet, das $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ entspricht, und $\widetilde{T_B} \in \mathrm{End}(V)$ dementsprechend $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.
   „$\Leftarrow$“ ist direkt, indem man $\widetilde{T_A}(u) = \lambda u$, $\widetilde{T_B}(w) = \lambda w$ setzt und faktorisiert.
   „$\Rightarrow$“ Wir nehmen nun an, dass $T_C(v) = \lambda v$. Die obige Gleichung wird dann zu

$$\widetilde{T_A}(u) + \widetilde{T_B}(w) = T_C(v) = \lambda v = \lambda u + \lambda w.$$

   Da wir haben

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_\ell \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\ell} A_{1j} u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\ell} A_{\ell j} u_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

   gilt $\widetilde{T_A}(u) \in U$. Ähnlich haben wir $\widetilde{T_B}(w) \in W$. Andererseits haben wir $\lambda u \in U$ und $\lambda w \in W$, da U und W Vektorräume sind. Schließlich sind U und W linear unabhängig, daher müssen wir haben $\widetilde{T_A}(u) = \lambda u$ und $\widetilde{T_B}(w) = \lambda w$.

2. Sei $A \in M_{n \times n}(K)$ und sei

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

   (a) Zeige, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \neq 0$.

(b) Zeige, dass für invertierbare $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt:

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right)$$

(c) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finde ein Polynom $p(x)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

Lösung:

(a) $\det(A) = p_A(0) = a_0$. Wenn die Determinante $\neq 0$ ist, dann ist die Matrix invertierbar.

(b) Aus Cayley-Hamilton wissen wir, dass $p_A(A) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0 \\ \iff & a_0 I_n = -((-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A) \\ \iff & a_0 A^{-1} = -((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n) \\ \iff & A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n). \end{aligned}$$

(c) Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(x) = -x^3 + 6x^2 + 3x - 18$$

und wir setzen in die Formel von (b) ein, um

$$A^{-1} = -\frac{1}{18}A^2 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}I_3\,.$$

zu bekommen.

3. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix vom Rang r. Zeige, dass der Grad des Minimalpolynoms von A kleiner oder gleich $r + 1$ ist.

Lösung: Nach der Definition des Rangs ist das Bild von L_A ein Unterraum der Dimension r. Betrachte die Einschränkung

$$F := L_A|_{\mathrm{Bild}(L_A)} : \mathrm{Bild}(L_A) \to \mathrm{Bild}(L_A).$$

Das charakteristische Polynom $q(X) := \mathrm{char}_F(X)$ von F hat Grad r und nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $q(F) = 0$.

Für $p(X) := q(X) \cdot X$ folgt für alle $v \in K^n$

$$p(L_A)(v) = (q(L_A) \circ L_A)(v) = q(L_A)(Av) = q(F)(Av) = 0,$$

also $p(L_A) = 0$, also $p(A) = 0$. Nach Definition teilt das Minimalpolynom von A das Polynom $p(X)$. Folglich ist der Grad des ersteren kleiner oder gleich dem Grad von $p(X)$, also kleiner oder gleich $r + 1$.

4. Sei A eine $n \times n$-Matrix, mit $n \geqslant 1$. Beweise, dass der Unterraum $\langle I_n, A, A^2, \ldots \rangle$ von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ Dimension $\leqslant n$ hat.

   Lösung: Der Unterraum $W := \langle I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1} \rangle$ von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist von n Elementen erzeugt, hat also Dimension $\leqslant n$. Es genügt daher zu zeigen, dass zeigen:

   Behauptung: Für alle $k \geqslant 0$ ist $A^k \in W$. Wir beweisen dies durch Induktion nach k. Induktionsverankerung: Für $k \leqslant n-1$ gilt dies nach Konstruktion von W. Oops: Im Fall $n = 0$ ist diese Aussage leer, also gar keine Verankerung. Aber dann ist sowieso $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ der Nullraum und der fragliche Raum ebenso, hat also Dimension $n = 0$, wie gewünscht. Im folgenden sei daher $n \geqslant 1$. Induktionsschritt: Sei $k \geqslant n$. Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei richtig für alle kleineren Werte von k. Das charakteristische Polynom von A ist normiert vom Grad n; schreiben wir es in der Form$_{\mathrm{char}_A}(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\mathrm{char}_A(A) = 0$, also

$$A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i.$$

   Durch Multiplizieren mit A^{k-n} ergibt sich daraus

$$A^k = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{i+k-n} = -\sum_{j=k-n}^{k-1} a_{j-k+n} A^j.$$

   Nach Induktionsvoraussetzung liegen alle A^j auf der rechten Seite in W; daher liegt auch A^k in W, was zu zeigen war.

5. (a) Seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen, die kommutieren, das heisst, für welche gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

   Sei λ ein Eigenwert von B der geometrischen Multiplizität 1. Zeige, dass jeder Eigenvektor von B zum Eigenwert λ auch ein Eigenvektor von A ist.

   (b) Sei P_σ die Permutationsmatrix zu der Permutation $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) = 1$ und $\sigma(i) = i + 1$ für alle $1 \leqslant i < n$. Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$ mit

$$P_\sigma A P_\sigma^{-1} = A.$$

   Zeige, dass A diagonalisierbar ist.

   Hinweis: Untersuche die Eigenwerte von P_σ und wende (a) an.

   Lösung:

(a) Sei $v \in K^n$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ. Da der zugehörige Eigenraum $E_{\lambda,B}$ eindimensional ist, ist er dann schon von v erzeugt. Wegen

$$B(Av) = A(Bv) = A(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (Av)$$

ist aber auch Av ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ. Also gilt $Av \in \langle v \rangle$ und somit $Av = \lambda' v$ für ein $\lambda' \in K$. Damit ist v auch ein Eigenvektor von A.

(b) Die Matrixdarstellung von P_σ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{C}^n$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Entwicklung bezüglich der ersten Zeile können wir leicht den Determinanten von $P_\sigma - X \cdot I_n$ berechnen. Tatsächlich erhalten wir zwei Terme: $-X$ mal einer unteren Dreiecksmatrix mit $-X$ auf der Diagonalen und $(-1)^{n+1}$ mal einer oberen Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonalen. Es folgt davon, dass das charakteristische Polynom von P_σ in $\mathbb{C}[X]$

$$\operatorname{char}_{P_\sigma}(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \zeta_n^k\right),$$

ist, wobei $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$ ist. Über $\mathbb{C}$ hat P_σ daher n verschiedene Eigenwerte der arithmetischen Vielfachheit 1. Also sind auch die geometrischen Vielfachheiten gleich 1, und P_σ ist diagonalisierbar mit eindimensionalen Eigenräumen. Somit besitzt $\mathbb{C}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von P_σ. Nach (a) sind dies auch Eigenvektoren von A; somit ist auch A diagonalisierbar.

6. Zeige, dass jede reelle invertierbare 2×2 Matrix eine der folgenden Eigenschaften erfüllt

- die Matrix ist diagonalisierbar;
- die Matrix ist triagonalisierbar mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1;
- man kann eine Basis finden, so dass die Matrixdarstellung in dieser Basis durch
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } b \neq 0$$
gegeben ist.

Einleitung zur Trigonalisierung. Im Folgenden ist V ein endlichdimensional Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

Definition. Ein Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ heisst trigonalisierbar, falls es ein geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmartix ist.

Satz. *Für $T \in \mathrm{End}(V)$ gilt:*

$$T \text{ ist trigonalisierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{char}_T(X) \text{ zerfällt in Linearfaktoren über } \mathbb{K}.$$

Lösung: Wir bemerken zunächst, dass das charakteristische Polynom p einer solchen Matrix ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten ist. Wenn beide seiner Nullstellen reell sind, zerfällt es über $\mathbb{R}[X]$ in Linearfaktoren. Dann ist entweder

- die Matrix diagonalisierbar, wenn für jede Nullstelle die algebraische Multiplizität gleich der geometrischen Multiplizität ist; oder
- die Matrix triagonalisierbar mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.

Betrachten wir nun den Fall, in dem das Polynom über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle λ. Schreibe $p(X) = X^2 + c_1 X + c_0$. Aus $p(\lambda) = 0$ folgt

$$0 = \overline{p(\lambda)} = \overline{\lambda^2 + c_1\lambda + c_0} = (\overline{\lambda})^2 + c_1\overline{\lambda} + c_0 = p(\overline{\lambda}),$$

da die Koeffizienten von p reell sind. Also ist die komplexe Konjugation von λ die andere Nullstelle von p. Es bleibt zu zeigen, dass jedes solche charachteristische Polynom von einer Rotationsmatrix stammt. Dazu zeigen wir:

Satz. *Sei A eine 2×2 relle Matrix mit komplexem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, und sei v ein komplexer Eigenvektor zu λ. Dann gilt $A = CBC^{-1}$ für*

$$C = \begin{pmatrix} | & | \\ \Re(v) & \mathrm{Im}(v) \\ | & | \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \Re(\lambda) & \mathrm{Im}(\lambda) \\ -\mathrm{Im}(\lambda) & \Re(\lambda) \end{pmatrix},$$

wobei

$$\Re\begin{pmatrix} x+iy \\ z+iw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\begin{pmatrix} x+iy \\ z+iw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}$$

gilt.

Beweis. Wir müssen zunächst zeigen, dass $\Re(v)$ und $\mathrm{Im}(v)$ linear unabhängig sind, um zu beweisen, dass C invertierbar ist. Wenn nicht, so existieren $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x\Re(v) + y\,\mathrm{Im}(v) = 0$. Dann wäre

$$\begin{aligned}(y+ix)v &= y\Re(v) - x\,\mathrm{Im}(v) + i(x\Re(v) + y\,\mathrm{Im}(v)) \\ &= y\Re(v) - x\,\mathrm{Im}(v) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Auf der einen Seite wäre $y\Re(v) - x\,\mathrm{Im}(v)$ also ein komplexes Vielfaches von v, und somit ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Andererseits wäre es ein reeller Eigenvektor von A, und da A reell ist, müsste es zu einem reellen Eigenwert korrespondieren. Dies ist ein Widerspruch.

Seien $\lambda = a + ib$ und $v = \left(\begin{smallmatrix} x+iy \\ z+iw \end{smallmatrix}\right)$. Da $\{\Re(v), \mathrm{Im}(v)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bildet, gilt

$$CBC^{-1} = A \iff \begin{cases} A\Re(v) & = & CBC^{-1}\Re(v) \\ A\,\mathrm{Im}(v) & = & CBC^{-1}\,\mathrm{Im}(v) \end{cases}$$

Auf der einen Seite ist

$$\begin{aligned} A\Re(v) + iA\,\mathrm{Im}(v) &= Av \\ &= \lambda v \\ &= (a+ib)\begin{pmatrix} x+iy \\ z+iw \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-by \\ az-bw \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} bx+ay \\ bz+aw \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$Ce_1 = \Re(v) \Leftrightarrow e_1 = C^{-1}\Re(v) \Leftrightarrow CBe_1 = CBC^{-1}\Re(v)$$

and similarly replacing e_1 by e_2 and $\Re(v)$ by $\mathrm{Im}(v)$. Also folgt

$$CBC^{-1}\Re(v) = CBe_1 = C\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-by \\ az-bw \end{pmatrix} = A\Re(v)$$

und genauso $CBC^{-1}\,\mathrm{Im}(v) = A\,\mathrm{Im}(v)$. $\square$