D-MATH — Lineare Algebra II — FS 2024

Prof. Dr. S. Zerbes

Musterlösung Serie 18

Diagonalisierung, Jordansche Normalenform

In diesem Übungsblatt werden die Begriffe “Hauptraum” und “verallgemeinerter Eigenraum” synonym verwendet.

1. Betrachte die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Finde eine Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, sodass $P^{-1}AP$ diagonal ist.

Solution: Die ONB

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

besteht aus Eigenvektoren von A, sodass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimme die Jordansche Normalenform der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_3$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Über $\mathbb{R}$ hat A das charakteristische Polynom $(X-1)^2(X-4)$. Der Eigenraum zum Eigenwert 4 hat also Dimension 1. Sodann berechnen wir $\operatorname{rank}(A - I_3) = 1$; deshalb hat der Eigenraum zum Eigenwert 1 die Dimension 2. Deshalb existiert eine Basis aus Eigenvektoren und die Matrix ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ mit der Jordanschen Normalform

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{F}_3$ ist das charakteristische Polynom gleich $(X-1)^3$; somit besitzt A genau einen verallgemeinert Eigenraum zum Faktor $X-1$. Wir rechnen

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $(A-I_3)^k = 0$ für $k \geqslant 2$. Aus $\dim \mathrm{Kern}(A-I_3) = 2$ folgt, dass es jeweils einen Jordanblock der Grösse 1 und 2 gibt. Somit hat die Matrix A über $\mathbb{F}_3$ die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimme die verallgemeinerte Eigenräume über $\mathbb{C}$ der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \\ -7 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

A: Die Matrix A hat das charakteristische Polynom X^4. Es existiert also genau ein verallgemeinert Eigenraum zum irreduziblen Faktor X, der nach dem Satz über die Hauptraumzerlegung (Theorem 14.3.15 des Skripts) gleich $\mathbb{R}^4$ sein muss: $\widetilde{\mathrm{Eig}}_X(A) = \mathbb{R}^4$.

B : Die Matrix B hat das charakteristische Polynom $(X-1)^3(X+1)$. Der verallgemeinert Eigenraum zum Faktor $X+1$ ist

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_{X+1}(B) \;=\; \ker(B+I_4) \;=\; \mathrm{Eig}_{-1}(B) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der verallgemeinert Eigenraum zum Faktor $X-1$ ist nach Definition der Kern der Abbildung $(B-I_4)^3$. Wir haben

$$(B-I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

also

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_{X-1}(B) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle .$$

$C:$ Das charakteristische Polynom der Matrix C über $\mathbb{C}$ ist

$$\mathrm{char}_C(X) \;=\; X^3 - 5X^2 + 8X - 6 \;=\; (X-3)(X-(1-i))(X-(1+i)) .$$

Deshalb ist die geometrische Vielfachheit genau 1 für jede Eigenwert. Es folgt, dass die verallgemeinerten Eigenräume die gleichen sind wie die üblichen Eigenräume, d.h. wir müssen nur 1 Eigenvektor für jeden Eigenwert finden. Eine kurze Berechnung ergibt

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_C(3) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \; \widetilde{\mathrm{Eig}}_C(1+i) = \left\langle \begin{pmatrix}-3-i\\1+3i\\2\end{pmatrix} \right\rangle, \; \widetilde{\mathrm{Eig}}_C(1-i) = \left\langle \begin{pmatrix}-3+i\\1-3i\\2\end{pmatrix} \right\rangle .$$

$D:$ Das charakteristische Polynom der Matrix D ist

$$\mathrm{char}_D(X) \;=\; X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4 \;=\; (X-2)^2 \cdot (X-1)^2 .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Eig}}_{X-2}(D) &= \ker((D-2I_4)^2) \\ &= \ker \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 & -3 \\ 13 & -3 & 5 & -5 \\ -8 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Eig}}_{X-1}(D) &= \ker((D-I_4)^2) \\ &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

4. Sei $K = \mathbb{C}$. Betrachte den Raum $K[x]_n$ der Polynome über K vom Grad kleinergleich n. Bestimme eine Jordannormalform der Endomorphismen

   (a)

$$\begin{aligned} D_1 : \; K[x]_n &\to K[x]_n \\ p(x) &\mapsto p'(x) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{array}{rccc} D_2: & K[x]_n & \to & K[x]_n \\ & p(x) & \mapsto & p''(x) \end{array}$$

Solution:

(a) Die Darstellungsmatrix von D_1 bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ ist

$$[D_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lesen ab, dass der einzige Eigenwert 0 und $\dim\ker\big([D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\big) = 1$ sind. Also ist eine Jordannormalform von D der Jordanblock $J_{0,n}$.

(b) Es gilt

$$[D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2! & & & \\ & 0 & 0 & 3! & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 0 & \frac{n!}{(n-2)!} \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab, dass der einzige Eigenwert 0 und $\dim\ker\big([D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\big) = 2$ sind. Jede Jordannormalform besteht also aus zwei Blöcken mit Nullen auf der Diagonalen.

Um die Grösse der Blöcke zu bestimmen, berechnen wir das Minimalpolynom von $[D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Dieses teilt das charakteristische Polynom X^{n+1}. Des Weiteren ist für $k \geqslant 1$ die Matrix $([D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^k$ die Darstellungsmatrix des Endomorphismus

$$\underbrace{D_2 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_2}_{k \text{ Faktoren}} = \underbrace{D \circ D \circ \cdots \circ D}_{2k \text{ Faktoren}}.$$

Die kleinste Potenz, für welche sie verschwindet ist also $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, was impliziert, dass $X^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$ das Minimalpolynom von $[D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ist. Also hat der grösste Block einer Jordannormalform von D_2 die Grösse $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Da genau zwei Blöcke vorkommen, hat der andere Grösse $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

5. Zeige den fehlenden Teil (lineare unabhängigkeit) der Behauptung im Beweis von Satz 14.4.1. des Skripts.

   Lösung: Da
$$\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, S^{b_1-1}v_1, \dots, v_\ell, \dots, S^{b_\ell-1}v_\ell\}$$

eine Basis von $S(V)$ ist, sind ihre Elemente linear unabhängig über dem Körper K. Es bleibt also zu zeigen, dass für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$, u_i linear unabhängig von den anderen Vektoren in

$$\mathcal{B} = \{u_1, Su_1, \dots, S^{b_1}u_1, \dots, u_\ell, Su_\ell, \dots, S^{b_\ell}u_\ell\}$$

ist. Angenommen, das ist für einige i nicht der Fall. Nach Umordnung der Basis können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $i = 1$. Wir nehmen also an, dass es $\{\alpha_{ij} \in K \mid i \in \{2, \dots, \ell\},\ j \in \{0, \dots, b_i\}\}$ gibt, sodass

$$u_1 = \sum_{i=2}^{\ell} \sum_{j=0}^{b_i} \alpha_{ij} S^j u_i.$$

Das Anwenden von S auf beiden Seiten ergibt

$$v_1 = \sum_{i=2}^{\ell} \sum_{j=0}^{b_i - 1} \alpha_{ij} S^j v_i,$$

wobei wir die Tatsache verwendet haben, dass $Su_i = v_i$ für alle i, dass $S^{b_i}v_i = 0_V$, und dass S linear ist. Aber diese letzte Gleichung widerspricht unserer Annahme, dass $\mathcal{B}'$ eine Basis von $S(V)$ über K ist. Das beendet den Beweis dafür, dass $\mathcal{B}$ eine linear unabhängige Menge über K ist.

6. Die Motivation hinter der Jordan-Normalform liegt oft in dem Bestreben, die Matrix so zu gestalten, dass sie möglichst viele Nullen enthält. Jedoch stellt sich die Frage, ob die Anzahl der Nullen tatsächlich durch die Jordan-Normalform maximiert wird. Anders ausgedrückt: Existiert eine quadratische Matrix A über einem Körper, die mehr Nullen aufweist als ihre Jordan-Normalform J?

   Lösung: Für eine nilpotente Matrix A stimmt die Aussage. Denn sei J ihre Jordannormalform mit k Jordanblöcken. Dann hat der Eigenraum $\mathrm{Eig}_0(A) = \mathrm{Kern}(L_A)$ die Dimension k, also hat A den Rang $n - k$. Daher hat A genau $n - k$ linear unabhängige Spalten, also auch mindestens $n - k$ von Null verschiedene Einträge. Dies ist aber genau die Anzahl der von Null verschiedenen Einträge von J, da jeder Jordanblock der Grösse m zum Eigenwert 0 genau $m - 1$ von Null verschiedene Einträge hat. Somit ist die Minimalität für nilpotente Matrizen gegeben.

   Im Allgemeinen gilt die Aussage aber nicht. Ein Gegenbeispiel über $\mathbb{Q}$ ist:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Hier ist A eine Blockdreiecksmatrix aus 2×2-Blöcken, bei der jeder Block das charakteristische Polynom $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ hat. Also hat A die Eigenwerte ± 1

jeweils mit arithmetischer Multiplizität 2. Eine direkte Rechnung zeigt aber, dass jeder Eigenwert die geometrische Multiplizität 1 hat. Daher hat A die angegebene Jordannormalform. Diese enthält 10 Nullen, gegenüber 11 Nullen in A.

Bemerkung: Auch wenn die Jordannormalform weniger Nullen hat als die ursprüngliche Matrix, werden die Rechnungen damit in der Regel trotzdem einfacher, weil die Haupträume nicht mehr durcheinander geworfen werden.

7. Finde ein Vektorraum W und $T \in \mathrm{Hom}(W)$, so dass

$$\ker(T^k) \subsetneq \ker(T^{k+1}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(T^k) \supsetneq \mathrm{Bild}(T^{k+1})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten.

Lösung: Sei $\mathbb{K}^\infty$ die Menge der Folgen mit Elementen in $\mathbb{K}$, und sei $W = \mathbb{K}^\infty \times \mathbb{K}^\infty$. Definieren Sie $T \in \mathrm{Hom}(W)$ durch

$$T\left((x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)\right) = \left((x_2, x_3, x_4, \dots), (0, y_1, y_2, \dots)\right).$$

T wendet den rückwärtigen Verschiebungsoperator B auf den ersten Platz und den vorwärtigen Verschiebungsoperator F auf den zweiten Platz an. Beachten Sie, dass wir haben

$$\begin{aligned} \ker(B^k) &= \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{K}^\infty \mid x_i = 0 \text{ für } i > k\} \subsetneq \ker(B^{k+1}) \\ \mathrm{Bild}(B^k) &= \mathbb{K}^\infty. \end{aligned}$$

Zusätzlich,

$$\begin{aligned} \ker(F^k) &= \{0\} \\ \mathrm{Bild}(F^k) &= \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{K}^\infty \mid x_i = 0 \text{ für } i \leqslant k\} \supsetneq \mathrm{Bild}(F^{k+1}). \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \ker(T^k) &= \ker(B^k) \times \ker(F^k) = \ker(B^k) \times \{0\} \\ \mathrm{Bild}(T^k) &= \mathrm{Bild}(B^k) \times \mathrm{Bild}(F^k) = \mathbb{K}^\infty \times \mathrm{Bild}(F^k), \end{aligned}$$

erfüllt die Abbildung T die gewünschten Eigenschaften.