

Musterlösung Serie 20

NORMIERTE RÄUME UND RÄUME MIT EINEM INNEREN PRODUKT

1. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + a x_1 y_2 + a x_2 y_1 + 7 x_2 y_2$$

ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 definiert?

Lösung: Man prüft direkt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^2 ist. Sodann berechnen wir:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_1^2 + 2a x_1 x_2 + 7x_2^2 \\ &= x_1^2 + 2a x_1 x_2 + a^2 x_2^2 - a^2 x_2^2 + 7x_2^2 \\ &= (x_1 + a x_2)^2 + (7 - a^2) x_2^2. \end{aligned}$$

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit, so folgt mit $x = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, dass $7 - a^2 > 0$ sein muss; also $|a| < \sqrt{7}$. Ist umgekehrt $|a| < \sqrt{7}$, so gilt wegen der obigen Rechnung $\langle x, x \rangle > 0$ für alle $x \neq 0$ und daher ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit. Somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist genau dann, wenn $|a| < \sqrt{7}$ gilt.

2. Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$.

- (a) Zeige, dass durch

$$\langle p, q \rangle := \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t} dt$$

ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

- (b) Bestimme die Matrix des obigen Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, x, \dots, x^n$ (siehe die Definition unten).

Definition. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein n -dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt. Die Matrix dieses inneren Produkts bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist die Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ mit $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Beachten Sie, dass bezüglich dieser Basis für beliebige Koordinatenvektoren $u, v \in V$ gilt:

$$\langle u, v \rangle = u^T A v.$$

Lösung:

- (a) Zunächst wissen wir aus der Analysis, dass das uneigentliche Integral konvergiert. Sodann zeigt man direkt aus den Linearitätseigenschaften des Integrals, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform ist. Offensichtlich ist sie symmetrisch. Sei nun $p \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle einen Punkt $x_0 > 0$ mit $p(x_0) \neq 0$. Da p eine stetige Funktion induziert, gilt dann $|p(x)| \geq c := \frac{1}{2}|p(x_0)| > 0$ auf einem ganzen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $x_0 \in [a, b]$. Da die Funktion $t \mapsto e^{-t}$ streng monoton fallend und $e^{-t} > 0$ für alle t ist, folgt

$$\langle p, p \rangle = \int_0^\infty p(t)^2 e^{-t} dt \geq \int_a^b p(t)^2 e^{-t} dt \geq c \cdot e^{-b} \cdot (b - a) > 0.$$

Damit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit und daher ein Skalarprodukt.

- (b) Für alle $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ sei

$$a(k) := \int_0^\infty t^k e^{-t} dt.$$

Dann ist

$$a(0) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1,$$

und für $k \geq 1$ gilt nach partieller Integration

$$a(k) = \int_0^\infty t^k e^{-t} dt = -t^k e^{-t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty kt^{k-1} (-e^{-t}) dt = k \cdot a(k-1).$$

Durch Induktion über k folgt daraus $a(k) = k!$. Sei schliesslich $A := (a_{ij})_{i,j}$ die Darstellungsmatrix des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der geordneten Basis $(1, x, \dots, x^n)$. Dann ist

$$a_{ij} = \langle x^{i-1}, x^{j-1} \rangle = a(i+j-2) = (i+j-2)!.$$

3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler normierter \mathbb{K} -Vektorraum. Nehme an, dass $T \in \text{Hom}(V)$ ist, so dass

$$\forall v \in V : \|Tv\| \leq \|v\|$$

gilt. Zeige, dass $T - \sqrt{2}I$ invertierbar ist.

Lösung: Da V endlich-dimensional ist, müssen wir nur zeigen, dass $T - \sqrt{2}I$ injektiv ist. Nehmen wir an, dass es einen Widerspruch gibt, dass $0 \neq u \in \ker(T - \sqrt{2}I)$ existiert. Dann gilt

$$Tu = \sqrt{2}u \implies \|Tu\| = \sqrt{2}\|u\| > \|u\|.$$

Hier haben wir verwendet, dass $\|u\| = 0$ genau dann, wenn $u = 0$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme und beendet daher den Beweis.

4. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum mit inneres produkt. Angenommen, $u, v \in V$. Beweisen Sie, dass $\langle u, v \rangle = 0$ genau dann gilt, wenn

$$\|u\| \leq \|u + av\|$$

für alle $a \in \mathbb{K}$ ist.

Lösung: Angenommen, $\langle u, v \rangle = 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \|u + av\|^2 &= \langle u + av, u + av \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, av \rangle + \langle av, u \rangle + \langle av, av \rangle \\ &= \|u\|^2 + a^2 \|v\|^2 + \bar{a}\langle u, v \rangle + a\overline{\langle u, v \rangle} \\ &= \|u\|^2 + a^2 \|v\|^2 \geq \|u\|^2. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die obige Ketten von Gleichheiten im Wesentlichen dem Satz des Pythagoras entsprechen.

Nehmen Sie nun an, dass $\|u\| \leq \|u + av\|$ für alle $a \in \mathbb{K}$. Dann haben wir

$$0 \leq \|u + av\|^2 - \|u\|^2 = |a|^2 \|v\|^2 + a\langle v, u \rangle + \bar{a}\langle u, v \rangle.$$

Wenn $v = 0$ ist, folgt $\langle u, v \rangle = 0$ aus den Axiomen. Wenn $v \neq 0$ ist, setzen Sie $a = -\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$ in die vorherige Gleichung ein. Es ergibt sich

$$0 \leq -\frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2}.$$

Jetzt kann dies nur gelten, wenn $\langle u, v \rangle = 0$ ist.

5. (a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem \mathbb{R} -Vektorraum V . Zeige, dass die Norm genau dann von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V induziert wird, wenn sie für alle $x, y \in V$ die *Parallelogrammidentität*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt.

- (b) Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Betrachte die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \quad V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ v = (v_1, v_2, \dots, v_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n |v_i| \end{aligned}$$

Zeige, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf V definiert, und beweise, dass sie nicht von einem Skalarprodukt herrührt.

Lösung:

(a) Im Fall $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2, \end{aligned}$$

also ist

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Sei umgekehrt $\|\cdot\|$ eine Norm auf V , welche die Parallelogrammidentität erfüllt. Definiere

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

wobei die letzte Gleichung aus der Parallelogrammidentität (PI) folgt. Diese Abbildung erfüllt $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ und $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ für alle $x, y \in V$. Da $\|\cdot\|$ bereits positiv definit ist, bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinear ist. Aufgrund der Symmetrie genügt es zu zeigen, dass die Abbildung linear in der ersten Variablen ist.

Für beliebige $x, x', y \in V$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle x + x', y \rangle &= \frac{1}{4}(\|(x + y) + x'\|^2 - \|x + x' - y\|^2) \\ &\stackrel{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{4}(2\|x + y\|^2 + 2\|x'\|^2 - \|x + y - x'\|^2 - \|x + x' - y\|^2) \\ &\stackrel{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{4}(2\|x + y\|^2 + 2\|x'\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x' - y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(2\|x + y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x'\|^2 + 4\|x'\|^2 - 2\|x' - y\|^2) \\ &\stackrel{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{4}(2\|x + y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x'\|^2 + 2\|x' + y\|^2 - 4\|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \|x' + y\|^2 - \|x'\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle. \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung additiv in der ersten Variablen. Das Verhalten unter skalarer Multiplikation können wir nur indirekt erschliessen. Zunächst zeigen wir die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ und alle $x, y \in V$:

(i) Wegen

$$0 = \langle 0, y \rangle = \langle x + (-x), y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle -x, y \rangle$$

gilt $\langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$.

(ii) Aus der Additivität folgt durch Induktion $\langle nx, y \rangle = n\langle x, y \rangle$.

(iii) Aus (ii) mit $\frac{1}{n}x$ anstelle von x folgt

$$\langle x, y \rangle = \langle n\frac{1}{n}x, y \rangle = n\langle \frac{1}{n}x, y \rangle,$$

und daher $\langle \frac{1}{n}x, y \rangle = \frac{1}{n}\langle x, y \rangle$.

Aus allen drei Aussagen zusammen folgt nun

$$\langle \frac{p}{q} \cdot x, y \rangle = \frac{p}{q} \cdot \langle x, y \rangle$$

für alle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ und alle $x, y \in V$.

Nun fixieren wir beliebige $x, y \in V$. Der von diesen erzeugte Unterraum U ist dann isomorph zu \mathbb{R}^n für ein $n \leq 2$. Die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf U ist wieder eine Norm und entspricht daher einer Norm auf \mathbb{R}^n . Wie durch die Dreiecksungleichung bewiesen werden kann, ist die Norm eine stetige Funktion von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} . Daraus folgt, dass der obige Ausdruck, der das Produkt definiert, eine stetige Funktion von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R} ist. Dies impliziert wiederum, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \langle tx, y \rangle - t\langle x, y \rangle$$

stetig ist. Nun zeigt aber die obige Gleichung, dass diese Funktion auf \mathbb{Q} verschwindet. Da sie stetig ist, verschwindet sie daher auf ganz \mathbb{R} . Es gilt also

$$\langle tx, y \rangle = t\langle x, y \rangle$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear in der ersten Variable, und wir sind fertig.

(b) Um zu zeigen, dass $\|\cdot\|_1$ nicht durch ein Skalarprodukt induziert wird, genügt es ein Paar von Vektoren zu finden, für welches $\|\cdot\|_1$ nicht die Parallelogrammgleichung erfüllt. Seien $x = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$, $y = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$. Dann gilt

$$\|x + y\|_1^2 = (1 + 1)^2 = 4$$

$$\|x - y\|_1^2 = (1 + 1)^2 = 4$$

$$2\|x\|_1^2 = 2$$

$$2\|y\|_1^2 = 2.$$

Also ist die Parallelogrammgleichung verletzt.

6. Sei $K = \mathbb{R}$, $V = M_{n \times n}(K)$ und betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow K \\ (A, B) &\mapsto \operatorname{Tr}(A^T B). \end{aligned}$$

Zeige, dass sie ein Skalarprodukt auf V definiert und finde eine orthonormale Basis bezüglich dieses Skalarprodukts. Die induzierte Norm wird als *Hilbert-Schmidt-Norm* bezeichnet. Gib eine Formel für die Norm einer Matrix $A \in V$ in Bezug auf ihre Einträge an.

Lösung: Die Grundregeln der Matrixmultiplikation implizieren, dass die Abbildung $(A, B) \mapsto A^T B$ bilinear ist. Da die Spurabbildung linear ist, ist die angegebene Abbildung also bilinear. Wegen

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(A^T B) = \operatorname{Tr}((A^T B)^T) = \operatorname{Tr}(B^T (A^T)^T) = \operatorname{Tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle$$

ist sie ausserdem symmetrisch. Sodann schreiben wir $A = (v_1, \dots, v_n)$ mit Spaltenvektoren v_i . Dann ist A^T die Matrix mit den Zeilen v_1^T, \dots, v_n^T und folglich

$$A^T A = (v_i^T v_j)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Die Spur ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge; darum gilt also

$$\langle A, A \rangle = \operatorname{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n v_i^T v_i.$$

Hier ist jeder Summand $v_i^T v_i$ das Betragsquadrat von v_i bezüglich des Standardskalarprodukts auf \mathbb{R}^n und folglich ≥ 0 . Also ist $\langle A, A \rangle \geq 0$. Für $A \neq 0$ ist ausserdem mindestens ein $v_i \neq 0$, also mindestens ein Summand > 0 und daher $\langle A, A \rangle > 0$. Somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.

Offenbar ist die Menge aller Matrizen

$$E_{k\ell} = (e_{pq}^{(k\ell)})_{1 \leq p, q \leq n}, \quad e_{pq}^{(k\ell)} = \begin{cases} 0, & (p, q) \neq (k, \ell) \\ 1, & (p, q) = (k, \ell) \end{cases}$$

eine Basis von $\operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Durch direkte Rechnung verifizieren wir

$$\langle E_{ij}, E_{k\ell} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) = (k, \ell), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also ist dies eine Orthonormalbasis.

Aliter: Wir identifizieren $\operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ mit \mathbb{R}^{n^2} , indem wir die Koeffizienten einer Matrix in irgendeiner fest gewählten Reihenfolge auflisten. Dies ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Für zwei $n \times n$ -Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{ij})_{i,j}$ zeigt nun eine direkte Rechnung die Gleichung

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Über den genannten Isomorphismus entspricht $\langle \cdot, \cdot \rangle$ also dem Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^{n^2} ; somit ist auch diese ein Skalarprodukt. Ausserdem entsprechen die $n \times n$ -Elementarmatrizen genau den Standardbasisvektoren von \mathbb{R}^{n^2} ; und da diese eine Orthonormalbasis für das Standardskalarprodukt bilden, gilt das Entsprechende für die $n \times n$ -Elementarmatrizen.

Wir bezeichnen die induzierte Norm mit $\|\cdot\|$. Seien $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $A^T = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ und $A^T A = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Es gilt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}.$$

Also ist $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ und

$$\|A\|^2 = \text{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$$

ist einfach die euklidische Norm auf A gesehen als ein Element von \mathbb{R}^{n^2} .

7. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Eine Bilinearform β auf V heisst ...

- *symmetrisch* wenn gilt $\forall v, w \in V: \beta(v, w) = \beta(w, v)$,
- *antisymmetrisch* wenn gilt $\forall v, w \in V: \beta(v, w) = -\beta(w, v)$,
- *alternierend* wenn gilt $\forall v \in V: \beta(v, v) = 0$.

Zeige:

- (a) Jede alternierende Bilinearform ist antisymmetrisch.
- (b) Ist $2 \neq 0$ in K , so ist jede antisymmetrische Bilinearform alternierend.
- (c) Ist $2 \neq 0$ in K , so ist jede Bilinearform auf eindeutige Weise die Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform.
- (d) Gib ein Beispiel einer antisymmetrischen, nicht alternierenden Bilinearform.

Lösung:

- (a) Ist β alternierend, so gilt für alle $v, w \in V$:

$$0 = \beta(v+w, v+w) = \beta(v, v) + \beta(v, w) + \beta(w, v) + \beta(w, w) = \beta(v, w) + \beta(w, v).$$

Also ist β antisymmetrisch.

- (b) Ist β antisymmetrisch, so gilt $\beta(v, v) = -\beta(v, v)$ und folglich $2\beta(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Falls $2 \neq 0$ ist, folgt $\beta(v, v) = 0$, also ist β alternierend.

- (c) Sei $\beta: V \times V \rightarrow K$ eine beliebige Bilinearform. Definiere Abbildungen $\beta_s, \beta_a: V \times V \rightarrow K$ durch

$$\begin{aligned}\beta_s(v, w) &:= \frac{1}{2} (\beta(v, w) + \beta(w, v)), \\ \beta_a(v, w) &:= \frac{1}{2} (\beta(v, w) - \beta(w, v)).\end{aligned}$$

Direkte Rechnung zeigt, dass β_s und β_a wieder bilinear sind, dass β_s symmetrisch und β_a alternierend ist, und dass $\beta = \beta_s + \beta_a$ ist.

Angenommen $\beta = \tilde{\beta}_s + \tilde{\beta}_a$ ist eine weitere Zerlegung in eine symmetrische Bilinearform $\tilde{\beta}_s$ und eine alternierende Bilinearform $\tilde{\beta}_a$. Für alle $v, w \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned}\beta(v, w) &= \tilde{\beta}_s(v, w) + \tilde{\beta}_a(v, w) = \beta_s(v, w) + \beta_a(v, w), \\ \beta(w, v) &= \tilde{\beta}_s(v, w) - \tilde{\beta}_a(v, w) = \beta_s(v, w) - \beta_a(v, w),\end{aligned}$$

und nach Addition beider Gleichungen auch

$$2\tilde{\beta}_s(v, w) = 2\beta_s(v, w).$$

Wegen $2 \neq 0$ folgt $\tilde{\beta}_s = \beta_s$ und mit $\tilde{\beta}_s + \tilde{\beta}_a = \beta = \beta_s + \beta_a$ dann auch $\tilde{\beta}_a = \beta_a$.

- (d) Nach (b) setzt ein solches Beispiel voraus, dass $2 = 0$ ist in K . Nehmen wir einen solchen Körper (zum Beispiel \mathbb{F}_2) und den Vektorraum K^n für $n \geq 1$ mit der Bilinearform $\beta(x, y) := x^T y$. Diese ist symmetrisch, und wegen der Gleichung $-1 = 1$ in K daher auch antisymmetrisch! Für jeden Standardbasisvektor e_i gilt aber $\beta(e_i, e_i) = e_i^T e_i = 1 \neq 0$. Somit ist β nicht alternierend.