Lineare Algebra - Übungen 1

1. (a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen sie, dass es Skalare $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mathcal{F}_{a,b} = x\mathcal{F}_{1,\varphi} + y\mathcal{F}_{1,\psi}.$$

   (Mit anderen Worten, schreiben Sie $\mathcal{F}_{a,b}$ als eine Linearkombination der beiden Eigenfolgen von S.)

   (b) Finden Sie eine geschlossene Form fuer den $n$ten Wert der Fibonacci Folge $\mathcal{F}_{a,b}$.

2. Eine Folge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ ist eine *Pell-Folge* wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt so dass

$$c_0 = a, \quad c_1 = b, \quad c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2};$$

   wir nennen diese Folge $\mathcal{P}_{a,b}$. Es sei V die Menge aller Pell-Folgen.

   (a) Es seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ Pell-Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ und $\alpha\mathcal{Q}$ ebenfalls Pell-Folgen sind.

   (b) Es sei $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ eine Pell-Folge. Zeigen Sie, dass die Folge $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ ebenfalls eine Pell-Folge ist.

   (c) Es sei $S : V \to V$ der Verschiebungsoperator, der die Folge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ auf $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ abbildet. Bestimmen Sie die Eigenfolgen von S in V mit den dazugehoerigen Eigenwerten.

   (d) Schreiben Sie $\mathcal{P}_{a,b}$ als eine Linearkombination der beiden Eigenfolgen.

   (e) Finden Sie eine geschlossene Form fuer den $n$ten Wert von $\mathcal{P}_{a,b}$.

   (f) ($\star$) Was geht schief, wenn wir statt dessen die Folgen $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ betrachten, die ueber die Rekursion

$$c_0 = a, \quad c_1 = b \quad c_n = 2c_{n-1} - c_{n-2}$$

   definiert sind?

Die Frage ($\star$) ist eine schwierigere Zusatzfrage. Sie sollten sie nur dann in Angriff nehmen, wenn Sie die anderen Fragen geloest haben.