

Lineare Algebra - Übungen 6

1. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von \mathbb{K}^n :

$$U := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\},$$

$$D := \{(\alpha, \dots, \alpha) \in \mathbb{K}^n \mid \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Unterräume $U, D, U \cap D$ und $U + D$.

2. Bestimmen Sie den Zeilen- bzw. Spaltenrang der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2 + 3a \\ -2 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit des Parameters a .

3. Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge der geraden Funktionen

$$V_1 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\}$$

bzw. der ungeraden Funktionen

$$V_2 := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

Zeige ausserdem $V = V_1 \oplus V_2$, d.h. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$.

Hinweis: Betrachten Sie für $f \in V$ die Funktion $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

4. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} , und sei W ein Unterraum. Es sei die folgende Relation $R \subset V \times V$ definiert:

$$v_1 R v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$$

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Gegeben $v \in V$, sei $[v] \in V/\sim$ die Äquivalenzklasse von v . Definieren Sie auf V/\sim eine Addition

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2] \quad \text{für } [v_1], [v_2] \in V/\sim$$

sowie eine skalare Multiplikation

$$\lambda \cdot [v] := [\lambda \cdot v] \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{K} \text{ und } [v] \in V/\sim$$

Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind und dass V/\sim mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum über \mathbb{K} ist.

Bemerkung: Der Vektorraum V/\sim wird auch Quotientenraum oder Faktorraum von V nach W genannt. Üblicherweise notieren wir diesen mit V/W .

5. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 1)$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$

(e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f$ die Identität

(f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$

(g) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f$ die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

(h) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow V, (x, y) \mapsto f_{x,y}$, wobei V der Vektorraum aller Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ist, und $f_{x,y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diejenige Linearkombination der Funktionen \sin und \cos ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht.

6. Betrachten Sie den Unterraum

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von \mathbb{R}^4 . Finden Sie die Basis zweier verschiedener Komplemente W_1 und W_2 von V in \mathbb{R}^4 .