Lineare Algebra - Übungen 10

1. Sei U ein beliebiger Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbestimmten gibt, dessen Lösungsmenge genau U ist.

2. (a) Sei V' ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass jede Linearform auf V' eine Fortsetzung zu einer Linearform auf V besitzt.

   (b) Sei $V = V_1 \oplus V_2$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus
   $$V^* \cong V_1^* \oplus V_2^*$$
   und beweisen Sie somit die Existenz eines solchen.

3. Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ ähnlich sind:
$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, sei $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die dazu duale Basis des Dualraums V^*, und sei $(k_1, \ldots, k_n)$ die zu B^* duale Basis des Bidualraums $(V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, K)$. Zeigen Sie, dass der natürliche Isomorphismus
$$\mathrm{ev}\colon V \xrightarrow{\sim} (V^*)^*, \; v \mapsto \mathrm{ev}_v$$
jedes v_j auf das entsprechende k_j abbildet. Hier ist ev_v die Evaluationsabbildung in v, das heisst für alle $l \in V^*$ gilt $\mathrm{ev}_v(l) = l(v)$.

5. Bestimmen Sie die Ränge der folgenden $(n \times n)$-Matrizen in Abhängigkeit der positiven ganzen Zahl n.

   (a) $(k\ell)_{k,\ell=1,\ldots,n}$

   (b) $\big((-1)^{k+\ell}\,(k+\ell-1)\big)_{k,\ell=1,\ldots,n}$

   (c) $\left(\dfrac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\right)_{k,\ell=0,\ldots,n-1}$