Lineare Algebra - Übungen 11

1. Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B' = (w_1, \dots, w_m)$ eine geordnete Basis von W. Sei $B'^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$ die zu B' duale Basis von W^*. Zeigen Sie, dass für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt
$$([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})_{ij} = w_i^*(f(v_j)) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

2. Finden Sie die Annulatoren der folgenden Unterräume
   (a) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^2$
   (b) $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^3$
   (c) $U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^3$
   (d) $U_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4$

3. Sei $n \geq 1$. Dann definieren wir das *kanonische Skalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$ als
$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$
   (a) Sei $u \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\ell_u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle u, v \rangle$ eine lineare Abbildung ist.
   (b) Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\{\ell_{b_1}, \dots, \ell_{b_n}\}$ eine Basis des Dualraums $(\mathbb{R}^n)^*$ ist.
   (c) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ist *orthogonal* zu $u \in \mathbb{R}^n$, falls $v \in \ker(\ell_u)$ gilt. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus
$$\langle u \rangle^{\perp} \cong \ker(\ell_u)$$
   gibt. Das heisst, der Annulator von $\langle u \rangle$ ist Isomorph zum Untervektorraum aller Vektoren, die orthogonal zu u sind.
   (d) Folgern Sie, dass für einen Unterraum $U \leq \mathbb{R}^n$ gilt
$$U^{\perp} \cong \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in \ker(\ell_u),\ \forall u \in U\}.$$
   (e) Bestimmen Sie diejenigen Unterräume von $\mathbb{R}^3$, die den Annulatoren der Unterräume
$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
   entsprechen.

4. Es sei V der Vektorraum der reellen Polynome von Grad kleiner gleich 3. Für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ definieren wir die Abbildungen $f_i : V \to \mathbb{R}$ durch $f_i(p) = \int_0^1 p^{(i)}(t)\, dt$ für alle Polynome $p \in V$ und wobei $p^{(i)}$ die i-te Ableitung des Polynomes p ist.
   (a) Finden Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Evaluationsabbildung $\mathrm{ev}_x \colon V \to \mathbb{R}$, $p \mapsto p(x)$ ein Element von V^* beschreibt.
   (b) Zeigen Sie, dass (f_0, f_1, f_2, f_3) eine Basis des Dualraumes V^* von V ist.
   (c) Drücken Sie die Elemente der zur Standardbasis $(1, t, t^2, t^3)$ dualen Basis des Dualraumes V^* als Linearkombination der Elemente der Basis (f_0, f_1, f_2, f_3) aus.

5. Gegeben seien zwei lineare Abbildungen $\varphi_1(x) = -6x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_5$ und $\varphi_2(x) = -7x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5$ von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}$.
   Sei V der Unterraum $V = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in V liegen.
   (b) Ergänzen Sie v_1 und v_2 zu einer Basis von V.
   (c) Bestimmen Sie eine *Orthonormalbasis* von V, bezüglich dem kanonischem Skalarprodukt. Also eine Basis $\mathcal{B}$, für die verschiedene Elemente $u, v \in \mathcal{B}$ orthogonal zueinander stehen, das heisst $\langle u, v \rangle = 0$ und sodass $\langle u, u \rangle = 1$ für alle $u \in \mathcal{B}$ gilt.