Lineare Algebra - Übungen 12

1. Es sei V ein K-Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Erinnern Sie sich an die Konstruktion der Abbildung $\alpha\colon (V/U)^* \to U^\perp$, $\alpha(\ell) = \ell \circ q_U$ aus der Vorlesung. Als Diagramm ist diese Abbildung beschrieben durch:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "q_U"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha(\ell)"] & \\ V/U \arrow[r, "\ell"'] & K. \end{tikzcd}$$

   (a) Zeigen Sie, dass α eine lineare Abbildung ist.

   (b) Zeigen Sie, dass α injektiv und surjektiv ist.

   (c) Beschreiben Sie die Inverse Abbildung $\alpha^{-1}\colon U^\perp \to (V/U)^*$.

   Die Abbildung α ist ein *natürlicher* Isomorphismus.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, gegeben durch

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   linear ist.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

   (c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f.

   (d) Seien $\mathcal{B} = (e_1 + e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3)$ und $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_4 + e_5, e_4 - e_5)$. Bestimmen Sie $[T^*]^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}$.

3. (a) Betrachten Sie den Unterraum U_1 von $\mathbb{R}^4$, gegeben als

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   Finden Sie ein Komplement W_1 zu U_1, das heisst einen Unterraum $W_1 \leq \mathbb{R}^4$, sodass $U_1 + W_1 = \mathbb{R}^4$ und $U_1 \cap W_1 = \{0\}$.

   (b) Betrachten Sie den Unterraum U_2 von $\mathbb{R}^4$, gegeben als

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid 9x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0,\ 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\}$$

   Finden Sie nun ein Komplement W_2 zu U_2.

   (c) Erinnern Sie sich an das kanonische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert in Aufgabe 3, der Serie 11. Finden Sie orthogonale Komplemente X_1 und X_2 zu U_1 beziehungsweise U_2. Sprich Komplemente, sodass alle Elemente aus X_i orthogonal zu allen Elementen aus U_i bezüglich des kanonischen Skalarprodukts sind.

(d) Was fällt Ihnen auf? Erklären Sie Ihre Erkenntnis mit Hilfe der Aufgabe 1 dieser Serie und der Aufgabe 3 der Serie 11.

4. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei W ein Unterraum von V. Finden Sie einen kanonischen Isomorphismus
$$\left(V^*/W^\perp\right)^* \cong W.$$

5. Es sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Diese Aufgabe soll Ihnen zeigen, dass die im ersten Isomorphismussatz konstruierte Abbildung $\overline{T}$ "alle wichtigen Informationen der Abbildung T enthält".
Angenommen, Sie erweitern die Abbildung T zu einer Abbildung $S\colon \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{40}$ in dem Sie S durch
$$S(x_1, \dots, x_{20}) := (T(x_1, x_2), 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{40}$$
definieren, also indem Sie $^T(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als die ersten drei Koordinaten in $\mathbb{R}^{40}$ auffassen.

   (a) Zeigen Sie, unter Anwendung des ersten, zweiten und dritten Isomorphiesatzes, dass die Abbildungen $\overline{T}$ und $\overline{S}$ *konjugiert* zueinander sind. Das heisst, finden Sie Isomorphismen φ und ψ, sodass
   $$\overline{T} = \psi \circ \overline{S} \circ \varphi.$$
   Finden Sie also unter anderem den Definitions- und Bildbereich der Isomorphismen φ und ψ.

   (b) Erklären Sie, warum sich die Abbildungen $\overline{T}$ und $\overline{S}$ also faktisch nicht von einander unterscheiden lassen.
   Tipp: Überprüfen Sie die Abbildungsmatrizen der beiden Abbildungen.

   (c) Berechnen Sie $\overline{T}$ für die Abbildung
   $$T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{pmatrix}.$$

6. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und
$$\langle\, , \rangle_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \langle x, y\rangle_A := x^t A y.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\langle\, , \rangle_A$ genau dann ein *Skalarprodukt* ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
   - $A = A^t$, also $b = c$.
   - $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$.

   (Für einen Vektorraum V ist eine Abbildung $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, *wenn*
   - *(positiv definit): $B(x, x) \geq 0$ für alle $x \in V$ und $B(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*
   - *(symmetrisch): $B(x, y) = B(y, x)$ für alle $x, y \in V$.*
   - *(bilinear): B ist bilinear, das heisst B ist linear in beiden Koordinaten.)*

(b) Für welche Matrizen $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ beschreibt $\langle\, ,\, \rangle_A$ eine Linearform auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, also $\langle\, ,\, \rangle_A \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^*$?

(c) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ invertierbar ist, falls $\langle\, ,\, \rangle_A$ ein Skalarprodukt ist.

(d) Finden Sie ein Beispiel für eine invertierbare Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, für die $\langle\, ,\, \rangle_A$ kein Skalarprodukt ist.

(e) Sei $x \in \mathbb{R}^2$ und $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\ell(y) = \langle x, y\rangle_A$ eine Linearform auf $\mathbb{R}^2$ beschreibt. Drücken Sie ℓ in der dualen Basis $\{e_1^*, e_2^*\}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ aus und beschreiben Sie $\ker(\ell)$ in Abhängigkeit von x und A.