Serie 14

Determinant

1. Jeder der folgenden Ausdrücke definiert eine Funktion D auf der Menge der 3×3-Matrizen über $\mathbb{R}$. In welchen dieser Fälle ist D eine 3-lineare Funktion?

   (a) $D(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$;

   (b) $D(A) = A_{11}^2 + 3A_{11}A_{22}$;

   (c) $D(A) = A_{11}A_{12}A_{33}$;

   (d) $D(A) = A_{13}A_{22}A_{32} + 5A_{12}A_{22}A_{32}$;

   (e) $D(A) = 0$;

   (f) $D(A) = 1$.

2. Beweise die folgende Proposition:

   Proposition (Satz 10.2.3 des Skripts)**.** *Es sei $A \in M_{n\times n}(K)$, und es sei B eine Matrix, die wir von A durch die elementare Zeilenumformung X erhalten.*

   (a) wenn $X = P(r,s)$ fuer $1 \leqslant r < s \leqslant n$, dann gilt $\det(B) = -\det(A)$*;*

   (b) wenn $X = M(r,\lambda)$ fuer $1 \leqslant r \leqslant n$ und $\lambda \in K^\times$, dann gilt $\det(B) = \lambda \det(A)$*;*

   (c) wenn $X = S(r,s,\lambda)$ fuer $1 \leqslant r, s \leqslant n, r \neq s$ und $\lambda \in K^\times$, dann gilt $\det(B) = \det(A)$*.*

3. Seien x_i und y_i Elemente eines Körpers mit $x_i \neq y_j$ für alle i, j; und sei

$$F_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) := \det\left(\left(\frac{1}{x_i - y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\right).$$

   (a) Beweisen Sie für alle $n \geqslant 1$ die Rekursionsformel

$$F_n(x_1, \ldots, y_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)(y_i - y_n)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_n)\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - y_i)} F_{n-1}(x_1, \ldots, y_{n-1}).$$

   Hint. Subtrahieren Sie die letzte Spalte von jeder anderen Spalte. Substrahieren Sie dann ein geeignetes Vielfache der letzten Zeile von jeder anderen Zeile.

   (b) Leiten Sie daraus eine Formel für $F_n(x_1, \ldots, y_n)$ her.

(c) Zeigen Sie, dass mit $c_n := \prod_{i=1}^{n-1} i!$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.$$

4. Sei K ein kommutativer Ring mit 1. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Definiere M_{ij} als die Determinante der $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die sich aus der Streichung der Zeile i und Spalte j von A ergibt. Betrachte dann

$$C := \big((-1)^{i+j} M_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ und } \operatorname{adj}(A) := C^T = \big((-1)^{i+j} M_{ji}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Sei ausserdem det die Determinantenfunktion auf $n \times n$-Matrizen uber K. Zeige:

(a) $(\operatorname{adj} A)A = A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I$;

(b) $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{n-1}$;

(c) $\operatorname{adj}\big(A^T\big) = (\operatorname{adj} A)^T$.

(A^T ist die Transponierte von A.)

5. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Zeige

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i).$$

Bemerkung: Produkte dieser Art werden *Vandermonde Determinanten* genannt und die obige Matrix wird *Vandermonde Matrix* genannt.

Hint. Benutze die Formel

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1})$$

und die vorhangehenden Übungen.

Single Choice. Pro Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$?

   - ◯ $x = -2$
   - ◯ $x = 2$
   - ◯ $x = -1$
   - ◯ $x = 1$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn

$$\det \begin{pmatrix} x^n & x^{n+2} & x^{2n} \\ 1 & x^n & a \\ x^{n+5} & x^{a+6} & x^{2n+5} \end{pmatrix} = 0, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

   gilt, dann ist a gleich

   - ◯ n
   - ◯ $n - 1$
   - ◯ $n + 1$
   - ◯ Keine der obigen Möglichkeiten