Serie 15

Polynome, Eigenvektoren/-werte

1. Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass das characteristische Polynom von T wohl-definiert ist, das heißt, dass es unabhängig von der Wahl der Basis ist.

2. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

   (a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

   (b) Bestimme die Eigenwerte von A.

3. Für eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix A, drücke das charakteristische Polynom von A^{-1} mit Hilfe des charakteristischen Polynoms von A aus.

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass für beliebigen Martrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

   gilt.

5. Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix, das heisst eine, für die ein $m \geqslant 1$ existiert mit $A^m = O_{n\times n}$. Zeige, dass der einzige mögliche Eigenwert von A gleich 0 ist. Wann genau ist 0 ein Eigenwert von A?

6. Eine komplexe Zahl z wird als *n-ten Wurzel der Einheit* bezeichnet, wenn $z^n - 1 = 0$ ist, und ist eine *primitive* n-ten Wurzel der Einheit, wenn zusätzlich

$$z^m - 1 \neq 0, \text{ für alle } 1 \leqslant m < n$$

   gilt. Das n-te *Kreisteilungspolynom*, $\Phi_n(z)$, ist das jenige ganzzahlige Polynom größten Grades mit Leitkoeffizient 1, das $z^n - 1$ teilt, jedoch zu allen $z^d - 1$ mit $1 \leqslant d < n$ teilerfremd ist.

   (a) Zeige, dass die Wurzeln von $\Phi_n(z)$ genau die primitive n-ten Wurzeln der Einheit sind.

   (b) Zeige, dass, wenn $n > 1$ ist, die Zahl $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ eine primitive Wurzel der Einheit ist.

   (c) Gib die Zerlegung in Linearfaktoren von $\Phi_n(z)$ in $\mathbb{C}[z]$.

(d) Gib die Zerlegung von $z^n - 1$ in Kreisteilungspolynome.

7. Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

   (a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ ist und $G(v) \neq 0$, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

   (b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

   (c) Gib ein Gegenbeispiel zu (b) an, falls V nicht endlichdimensional ist.