Serie 17

Diagonalisierbarkeit, Minimale Polynom

1. Beweise Lemma 14.2.2. des Skripts.

2. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und sei

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

   (a) Zeige, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \neq 0$.

   (b) Zeige, dass für invertierbare $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt:

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right)$$

   (c) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finde ein Polynom $p(x)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

3. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix vom Rang r. Zeige, dass der Grad des Minimalpolynoms von A kleiner oder gleich $r + 1$ ist.

4. Sei A eine $n \times n$-Matrix, mit $n \geqslant 1$. Beweise, dass der Unterraum $\langle I_n, A, A^2, \ldots\rangle$ von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ Dimension $\leqslant n$ hat.

5. (a) Seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen, die kommutieren, das heisst, für welche gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

   Sei λ ein Eigenwert von B der geometrischen Multiplizität 1. Zeige, dass jeder Eigenvektor von B zum Eigenwert λ auch ein Eigenvektor von A ist.

   (b) Sei P_σ die Permutationsmatrix zu der Permutation $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) = 1$ und $\sigma(i) = i + 1$ für alle $1 \leqslant i < n$. Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$ mit

$$P_\sigma A P_\sigma^{-1} = A.$$

   Zeige, dass A diagonalisierbar ist.

   Hinweis: Untersuche die Eigenwerte von P_σ und wende (a) an.

6. Zeige, dass jede reelle invertierbare 2×2 Matrix eine der folgenden Eigenschaften erfüllt

- die Matrix ist diagonalisierbar;
- die Matrix ist triagonalisierbar mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1;
- man kann eine Basis finden, so dass die Matrixdarstellung in dieser Basis durch
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } b \neq 0$$
gegeben ist.

Einleitung zur Trigonalisierung. Im Folgenden ist V ein endlichdimensional Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

Definition. Ein Endomorphismus $T \in \operatorname{End}(V)$ heisst trigonalisierbar, falls es ein geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmartix ist.

Satz. *Für $T \in \operatorname{End}(V)$ gilt:*

$$T \textit{ ist trigonalisierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{char}_T(X) \textit{ zerfällt in Linearfaktoren über } \mathbb{K}.$$