D-MATH
Prof. Dr. S. Zerbes

Lineare Algebra II

FS 2024

Serie 19

Jordansche Normalenform

In diesem Übungsblatt werden die Begriffe "Hauptraum" und "verallgemeinerter Eigenraum" synonym verwendet.

1. Bestimme die Jordansche Normalenform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & 2 & & \\ & & 7 & 3 & \\ & & & 7 & 4 \\ & & & & 7 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{Q}).$$

2. Bestimme die Jordansche Normalenform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der komplexen Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Finde ein Vektorraum V und eine lineare Abbildung $T \in \mathrm{Hom}(V)$, so dass
$$V = \ker(T) \oplus \mathrm{Bild}(T) \tag{※}$$
nicht gilt.

   (b) Können Sie ein Kriterium finden, um festzustellen, für welche linearen Operatoren Gleichung (※) gilt?

4. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$
Finde einen Vektor, der eine Jordan-Kette der Länge 3 von A erzeugt.

5. Sei N eine komplexe 3×3 nilpotente Matrix.

   (a) Zeige, dass $A = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ die Gleichung $A^2 = I + N$ erfüllt. Wir sagen, dass A eine Quadratwurzel von $I + N$ ist.

   (b) Verwende (a), um zu zeigen, dass wenn $\lambda \neq 0$ ist, dann $\lambda I_3 + N$ eine Quadratwurzel hat.

   (c) Sei B eine invertierbare 3×3 Matrix. Zeige, dass B eine Quadratwurzel hat.

   Hinweis. Verwenden Sie Argumente ähnlich denen, die Sie in (a) und (b) verwendet haben, um eine allgemeine Formel für die Quadratwurzel von $\mu I_2 + \widetilde{N}$ zu finden, wobei $\widetilde{N}$ eine 2×2 komplexe nilpotente Matrix ist und μ eine nicht-null komplexe Zahl ist.

6. Angenommen, eine Matrix $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ hat das folgende charakteristische Polynom. Finde alle möglichen JNFs (Jordan Normalformen) von A unter Umordnung der Jordan-Blöcke.

   (a) $(x-1)^2(x+2)^2$,

   (b) $(x-1)^3(x+2)$.

7. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit dem Minimalpolynom $(X-3)(X+5)^2$ und dem charakteristischem Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$. Bestimme die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

8. Ein Endomorphismus der Form $\mathrm{id}_V + n$ für einen nilpotenten Endomorphismus n heisst *unipotent*. Analog für quadratische Matrizen. Sei $\mathbb{Q} \subset K$. Zeige:

   (a) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n ist

   $$\exp(n) := \sum_{m \geqslant 0}' \frac{n^m}{m!}$$

   wohldefiniert und unipotent.

   (b) Für jeden unipotenten Endomorphismus u ist

   $$\log(u) := \sum_{k \geqslant 1}' (-1)^{k-1} \frac{(u - \mathrm{id}_V)^k}{k}$$

   wohldefiniert und nilpotent.

   (c) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n gilt $\log(\exp(n)) = n$.

   (d) Für jeden unipotenten Endomorphismus u gilt $\exp(\log(u)) = u$.