Serie 22

QR-Zerlegung, Dualräume

1. Berechne eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
in eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Verwende diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, 3, -3)^T$ zu lösen.

2. Berechne eine QR-Zerlegung von
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sei $A \in O_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass es einen eindeutigen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $A|_U = \mathrm{id}_U$ und $A(U^\perp) \subset U^\perp$ ist und $A|_{U^\perp}$ keine Fixpunkte ausser $0 \in U^\perp$ hat.

4. Sei $V = C([-1, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit dem inneren Produkt
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$
für $f, g \in V$. Sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$ das lineare Funktional definiert durch $\varphi(f) = f(0)$. Zeige, dass kein $g \in V$ existiert, sodass
$$\forall f \in V : \varphi(f) = \langle f, g\rangle$$
ist.

   Warum ist dies kein Gegenbeispiel zu Theorem 15.7.3 der Vorlesung?

5. Für einen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ betrachte den Isomorphismus
$$\delta\colon V \to V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}),\ v \mapsto \delta(v) := \langle v, \cdot\rangle.$$
   (a) Zeige, dass genau ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle^*$ auf V^* existiert, so dass δ eine Isometrie ist.

   (b) Sei B eine geordnete Basis von V, und sei B^* die zugehörige duale Basis von V^*. Gib die Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle^*$ bezüglich B^* in Termen der Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich B an.