D–MATH

Prüfung Lineare Algebra I und II

401-1152-02L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3i & i & 2i \\ 4 & 0 & 2i \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

invertierbar?

(A) Wahr

(B) Falsch

1.MC2 [1 Punkt] Die Jordan-Normalform der Matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

hat für jeden ihrer Eigenwerte einen einzigen Block.

(A) Wahr

(B) Falsch

1.MC3 [1 Punkt] Die Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

ist unitär.

(A) Wahr

(B) Falsch

1.MC4 [1 Punkt] Was ist die Dimension von $\mathbb{C}(\mathbb{F}_3)$ über $\mathbb{C}$ (hier bezeichnet $\mathbb{F}_3$ das endliche Feld mit 3 Elementen und $\mathbb{C}(\mathbb{F}_3)$ den komplexen Vektorraum über der freien Menge $\mathbb{F}_3$)?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

1.MC5 [1 Punkt] Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 2 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

diagonalisierbar?

(A) $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

(B) $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(C) $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$

(D) $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1/3, 1/3\}$

1.MC6 [1 Punkt] Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

(A) Wahr

(B) Falsch

1.MC7 [1 Punkt] Angenommen, dass $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ Mengen in einem Vektorraum V sind und S_1 linear unabhängig ist. Dann ist S_2 linear unabhängig.

(A) Wahr

(B) Falsch

1.MC8 [1 Punkt] Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume, und seien $S \in \mathrm{Hom}(V)$, $T \in \mathrm{Hom}(W)$. Dann gilt

$$\det(S \otimes T) = \det(S)\det(T).$$

(A) Wahr

(B) Falsch

Aufgabe 2

2.A1 [2 Punkte] Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4-t \\ 0 & -2 & 2-t & 2t-8 \\ -3 & t & 0 & 4-t \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ invertierbar.

2.A2 [2 Punkte] Die Zahlen 2024, 5888, 6808 und 4232 sind alle durch 184 teilbar. Zeigen Sie (ohne brute-force Berechnung), dass die Determinante von

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

durch 184 teilbar ist.

2.A3 [3 Punkte] Ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar über $\mathbb{F}_5$?

2.A4 [3 Punkte] Berechnen Sie die längste Jordankette, die mit jedem Eigenwert verbunden ist, von

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

Ihr charakteristisches Polynom ist

$$\chi_D(x) = (x-5)^2(x-2)(x-1)$$

2.A5 [2 Punkte] Finden Sie ein Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, sodass $E^{-1} = p(E)$ für

$$E = \begin{pmatrix} 1+2i & -1 & 3 \\ 3-3i & 1+i & -3-3i \\ -1-i & i & 0 \end{pmatrix}$$

2.A6 [3 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und finden Sie eine orthonormale Basis bezüglich des standarden inneren Produkts auf $\mathbb{R}^3$, die die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

diagonalisiert.

Aufgabe 3

3.A1 [**4 Punkte**] Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten. Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel: A ist invertierbar und A^{-1} hat ganzzahlige Koeffizienten genau dann, wenn $\det(A) = \pm 1$.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlich-dimensionale Vektorräume mit inneren Produkte.

4.A1 [1 Punkt] Geben Sie den Riesz-Darstellungssatz an (ohne ihn zu beweisen).

4.A2 [1 Punkt] Definieren Sie das adjungierte einer Abbildung $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Sie dürfen den Riesz-Darstellungssatz verwenden.

4.A3 [2 Punkte] Für $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$, beweisen Sie, dass

$$\dim\ker(T^*) = \dim\ker(T) + \dim(W) - \dim(V)$$

und dass

$$\mathrm{Rang}(T^*) = \mathrm{Rang}(T).$$

4.A4 [1 Punkt] Geben Sie die Definition eines normalen Operators in $\mathrm{Hom}(V)$.

4.A5 [1 Punkt] Angenommen, dass $S \in \mathrm{Hom}(V)$ normal ist. Beweisen Sie, dass $\ker S = \ker S^*$.

4.A6 [4 Punkte] Angenommen, dass $S \in \mathrm{Hom}(V)$ normal ist. Beweisen Sie, dass

$$\ker(S^k) = \ker(S) \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(S^k) = \mathrm{Bild}(S)$$

für jede positive ganze Zahl k.

Aufgabe 5

5.A1 [4 Punkte] Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $T \in \mathrm{Hom}(V)$, und die Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ verschiedene Eigenwerte von T. Für alle i, sei v_i ein Eigenvektor von T mit Eigenwert λ_i. Zeige, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 6

Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ der Polynome vom Grad höchstens 2 mit komplexen Koeffizienten. Wir versehen ihn mit dem Skalarprodukt

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : & V \times V & \to & \mathbb{C} \\ & (p(x), q(x)) & \mapsto & \langle p(x), q(x) \rangle = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} p(t)q(t)dt \end{array}$$

Eine orthonormale Basis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist

$$\left\{ 1, \sqrt{12}x, 2\sqrt{45}\left(x^2 - \frac{1}{12}\right) \right\}.$$

6.A1 [5 Punkte] Finde das Polynom $p_0(x) \in V$ so, dass

$$\int_{-1/2}^{1/2} p(t)p_0(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} p(t)\cos(\pi t)dt$$

für alle $p(x) \in V$ ist.

Aufgabe 7

Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K.

7.A1 [1 Punkt] Formulieren Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts $V \otimes W$.

7.A2 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass jeder andere Vektorraum, der dieselbe universelle Eigenschaft erfüllt, kanonisch isomorph zu $V \otimes W$ ist.

7.A3 [3 Punkte] Verwenden Sie (a) und (b), um zu beweisen, dass

$$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

gilt.