# Aufgaben und Lösungsvorschlag

# Aufgabe 1

**1.MC1 [1 Punkt]** Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3i & i & 2i \\ 4 & 0 & 2i \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

invertierbar?

(A) Wahr

(B) Falsch ✓

**1.MC2 [1 Punkt]** Die Jordan-Normalform der Matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

hat für jeden ihrer Eigenwerte einen einzigen Block.

(A) Wahr

(B) Falsch ✓

**1.MC3 [1 Punkt]** Die Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

ist unitär.

(A) Wahr ✓

(B) Falsch

**1.MC4 [1 Punkt]** Was ist die Dimension von $\mathbb{C}(\mathbb{F}_3)$ über $\mathbb{C}$ (hier bezeichnet $\mathbb{F}_3$ das endliche Feld mit 3 Elementen und $\mathbb{C}(\mathbb{F}_3)$ den komplexen Vektorraum über der freien Menge $\mathbb{F}_3$)?

(A) 1

(B) 2

(C) 3 ✓

(D) 4

**1.MC5 [1 Punkt]** Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 2 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

diagonalisierbar?

(A) $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

(B) $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ✓

(C) $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$

(D) $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1/3, 1/3\}$

**1.MC6 [1 Punkt]** Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

(A) Wahr ✓

(B) Falsch

**1.MC7 [1 Punkt]** Angenommen, dass $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ Mengen in einem Vektorraum $V$ sind und $S_1$ linear unabhängig ist. Dann ist $S_2$ linear unabhängig.

(A) Wahr

(B) Falsch ✓

**1.MC8 [1 Punkt]** Seien $V$ und $W$ endlichdimensionale Vektorräume, und seien $S \in \operatorname{Hom}(V)$, $T \in \operatorname{Hom}(W)$. Dann gilt

$$\det(S \otimes T) = \det(S)\det(T).$$

(A) Wahr

(B) Falsch ✓

# Aufgabe 2

**2.A1 [2 Punkte]** Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4-t \\ 0 & -2 & 2-t & 2t-8 \\ -3 & t & 0 & 4-t \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ invertierbar.

**Lösung:**

We compute that

$$\det A = -t^3 + 7t^2 - 14t + 8 = -(t-1)(t-2)(t-4).$$

Hence, $A$ is invertible for $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 4\}$.

**2.A2 [2 Punkte]** Die Zahlen 2024, 5888, 6808 und 4232 sind alle durch 184 teilbar. Zeigen Sie (ohne brute-force Berechnung), dass die Determinante von

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

durch 184 teilbar ist.

**Lösung:**

Sei $C_j$ die $j$-te Spalte von $B$. Wir addieren

$$1000 \cdot C_1 + 100 \cdot C_2 + 10 \cdot C_3$$

zur letzten Spalte. Dies ändert die Determinante nicht und wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2024 \\ 5 & 8 & 8 & 5888 \\ 6 & 8 & 0 & 6808 \\ 4 & 2 & 3 & 4232 \end{pmatrix}.$$

Da 184 die letzte Spalte teilt und die Determinante linear in Bezug auf die Spalten ist, haben wir

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2024 \\ 5 & 8 & 8 & 5888 \\ 6 & 8 & 0 & 6808 \\ 4 & 2 & 3 & 4232 \end{pmatrix} = 184 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & a_1 \\ 5 & 8 & 8 & a_2 \\ 6 & 8 & 0 & a_3 \\ 4 & 2 & 3 & a_4 \end{pmatrix},$$

mit $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}$. Da die Determinante einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen eine ganze Zahl ist, schließen wir, dass $184 \mid \det B$.

**2.A3 [3 Punkte]** Ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar über $\mathbb{F}_5$?

**Lösung:**

Wir haben

$$\chi_C(x) = -x^2(x-1) \in \mathbb{F}_5[x].$$

Daher $a_1 = g_1 = 1$. Wir müssen überprüfen, dass $a_0 = g_0 = 2$ ist. Wir berechnen

$$\dim\ker C = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 1.$$

Daher ist die obige Matrix nicht diagonalisierbar über $\mathbb{F}_5$.

**2.A4 [3 Punkte]** Berechnen Sie die längste Jordankette, die mit jedem Eigenwert verbunden ist, von

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

Ihr charakteristisches Polynom ist

$$\chi_D(x) = (x-5)^2(x-2)(x-1)$$

**Lösung:**

Die JNF ist

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 5 & 1 \\ & & & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen noch die Ketten berechnen. Die Eigenwerte von $D$ sind $\{1, 2, 5\}$. Wir berechnen, dass

$$\ker(D - I_4) = \left\langle v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(D - 2 \cdot I_4) = \left\langle v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(D - 5 \cdot I_4) = \left\langle v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alle $v_i$ erzeugen Jordanketten der Länge eins. Da jedoch

$$\dim \widetilde{\mathrm{Eig}}_D(5) = 2$$

müssen wir $u \in \widetilde{\mathrm{Eig}}_D(5)$ finden, sodass

$$(D - 5 \cdot I_4)u = v_3.$$

Wir finden leicht, dass wir

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nehmen können. Somit haben wir die Jordanketten gefunden

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1\} \\ C_2 &= \{v_2\} \\ C_3 &= \{u, (D - 5 \cdot I_4)u = v_3\}. \end{aligned}$$

**2.A5 [2 Punkte]** Finden Sie ein Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, sodass $E^{-1} = p(E)$ für

$$E = \begin{pmatrix} 1+2i & -1 & 3 \\ 3-3i & 1+i & -3-3i \\ -1-i & i & 0 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Das charakteristische Polynom von $E$ ist gegeben durch

$$-x^3 + (2+3i)x^2 - (2+6i)x + 6i.$$

Durch den Satz von Cayley-Hamilton haben wir

$$\begin{aligned} -E^3 + (2+3i)E^2 - (2+6i)E + 6i \cdot I_3 &= 0 \\ -E^3 + (2+3i)E^2 - (2+6i)E &= -6i \cdot I_3 \\ E\frac{-1}{6i}(-E^2 + (2+3i)E - (2+6i)I_3) &= I_3 \end{aligned}$$

Daher nehmen wir

$$p(x) = \frac{-1}{6i}(-x^2 + (2+3i)x - (2+6i)).$$

**2.A6 [3 Punkte]** Berechnen Sie die Eigenwerte und finden Sie eine orthonormale Basis bezüglich des standarden inneren Produkts auf $\mathbb{R}^3$, die die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

diagonalisiert.

**Lösung:**

Das charakteristische Polynom faktorisiert sich leicht in

$$\chi_F(x) = (\sqrt{2} - x)(3 - x)(1 - x).$$

Daher sind die Eigenwerte von $F$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = 3$. Wir berechnen

$$\mathrm{Eig}_F(\lambda_1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Eig}_F(\lambda_2) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Eig}_F(\lambda_3) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Die obigen Eigenvektoren sind bereits orthogonal, daher normalisieren wir sie nur und finden die orthonormale Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

die $F$ diagonalisiert.

# Aufgabe 3

**3.A1** [**4 Punkte**] Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten. Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel: $A$ ist invertierbar und $A^{-1}$ hat ganzzahlige Koeffizienten genau dann, wenn $\det(A) = \pm 1$.

**Lösung:**

Assume that $A$ is as above. Then, there exists a matrix $A^{-1}$ with integer coefficients such that

$$AA^{-1} = I_n.$$

Then,

$$1 = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Since the coefficients of $A$ and $A^{-1}$ are integers, their respective determinants are integers, as shown by the formula

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(n)}.$$

The only integers that admit a multiplicative inverse are $\pm 1$, which implies that $\det A \in \{\pm 1\}$.

# Aufgabe 4

Sei $K$ ein Körper und seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlich-dimensionale Vektorräume mit inneren Produkte.

**4.A1 [1 Punkt]** Geben Sie den Riesz-Darstellungssatz an (ohne ihn zu beweisen).

**4.A2 [1 Punkt]** Definieren Sie das adjungierte einer Abbildung $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Sie dürfen den Riesz-Darstellungssatz verwenden.

**4.A3 [2 Punkte]** Für $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$, beweisen Sie, dass

$$\dim\ker(T^*) = \dim\ker(T) + \dim(W) - \dim(V)$$

und dass

$$\mathrm{Rang}(T^*) = \mathrm{Rang}(T).$$

**4.A4 [1 Punkt]** Geben Sie die Definition eines normalen Operators in $\mathrm{Hom}(V)$.

**4.A5 [1 Punkt]** Angenommen, dass $S \in \mathrm{Hom}(V)$ normal ist. Beweisen Sie, dass $\ker S = \ker S^*$.

**4.A6 [4 Punkte]** Angenommen, dass $S \in \mathrm{Hom}(V)$ normal ist. Beweisen Sie, dass

$$\ker(S^k) = \ker(S) \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(S^k) = \mathrm{Bild}(S)$$

für jede positive ganze Zahl $k$.

**Lösung:**

1. Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler inneres-Produkt Raum über $K$, und es sei $\phi \in V^*$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $u \in V$, so dass

$$\forall v \in V : \phi(v) = \langle v, u\rangle$$

gilt.

2. Sei $w \in W$ und betrachte das lineare Funktional

$$\lambda_w(v) := \langle Tv, w\rangle_W.$$

Dann existiert gemäß dem Darstellungssatz von Riesz ein $v_0 \in V$, so dass

$$\forall v \in V : \lambda_w(v) = \langle v, v_0\rangle.$$

Wir definieren $T^*(w) := v_0$. Die adjungierte Abbildung von $T$ ist dann die Abbildung $T^*$.

3. Durch den Rangsatz haben wir

$$\dim V = \dim\ker T + \dim\mathrm{Bild}\, T.$$

Nun, wie in den Vorlesungen gezeigt, ist $\mathrm{Bild}\, T = \ker(T^*)^\perp$. Daher,

$$\dim\mathrm{Bild}\, T = \dim W - \dim\ker T^*.$$

Wir folgern, dass

$$\dim V = \dim \ker T + \dim W - \dim \ker T^*$$

und, erneut durch den Rangsatz, dass

$$\dim \operatorname{Bild} T = \dim \operatorname{Bild} T^* + \dim \ker T^* - \dim \ker T^*.$$

4. Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler inneres-Produkt Raum über $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathbb{R}$. Eine lineare Abbildung $L : V \to V$ ist normal, wenn

$$T^* \circ T = T \circ T^*.$$

5. Angenommen, $u \in \ker(T)$. Da $T$ normal ist, haben wir

$$0 = \langle Tu, Tu \rangle = \langle u, T^*Tu \rangle = \langle u, TT^*u \rangle = \|T^*u\|^2 .$$

Daher $\ker T \subseteq \ker T^*$. Wir erhalten die umgekehrte Inklusion, indem wir $(T^*)^* = T$ verwenden.

6. Sei $w \in \operatorname{Bild} T$, $w \neq 0$. Wie in den Vorlesungen gezeigt, ist $\operatorname{Bild} T = \ker(T^*)^\perp = \ker(T)^\perp$. Da

$$\ker T \cap \ker(T)^\perp = \{0\}$$

und $w \neq 0$, haben wir $w \in V \setminus \ker(T)$. Das impliziert, dass $Tw \neq 0$ und offensichtlich $Tw \in \operatorname{Bild}(T)$. Durch das gleiche Argument sehen wir, dass $Tw \notin \ker T$, daher $w \notin \ker(T^2)$. Durch Induktion erhalten wir, dass $w \notin \ker T \implies w \notin \ker(T^k)$ für alle $k \geq 1$. Also, $\ker T^k \subseteq \ker T$. Die umgekehrte Inklusion ist direkt, was beweist, dass

$$\ker T^k = \ker T.$$

# Aufgabe 5

**5.A1 [4 Punkte]** Seien $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $K$, $T \in \mathrm{Hom}(V)$, und die Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ verschiedene Eigenwerte von $T$. Für alle $i$, sei $v_i$ ein Eigenvektor von $T$ mit Eigenwert $\lambda_i$. Zeige, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind.

**Lösung:**

See Satz 12.3.2 from the Skript.

# Aufgabe 6

Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ der Polynome vom Grad höchstens 2 mit komplexen Koeffizienten. Wir versehen ihn mit dem Skalarprodukt

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : & V \times V & \to & \mathbb{C} \\ & (p(x), q(x)) & \mapsto & \langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} p(t) q(t) dt \end{array}$$

Eine orthonormale Basis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist

$$\left\{ 1, \sqrt{12}x, 2\sqrt{45}\left(x^2 - \frac{1}{12}\right) \right\}.$$

**6.A1 [5 Punkte]** Finde das Polynom $p_0(x) \in V$ so, dass

$$\int_{-1/2}^{1/2} p(t) p_0(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} p(t) \cos(\pi t) dt$$

für alle $p(x) \in V$ ist.

**Lösung:**

We compute

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} e_0(t) \cos(\pi t) dt &= \frac{2}{\pi} \\ \int_{-1/2}^{1/2} e_1(t) \cos(\pi t) dt &= 0 \\ \int_{-1/2}^{1/2} e_2(t) \cos(\pi t) dt &= \frac{2\sqrt{45}\pi^2 - 24\sqrt{45}}{3\pi^3}. \end{aligned}$$

We conclude that

$$p_0(x) = \frac{2}{\pi} + 30 \frac{2\pi^2 - 24}{\pi^3} \left( x^2 - \frac{1}{12} \right).$$

# Aufgabe 7

Es seien $V, W$ endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper $K$.

**7.A1 [1 Punkt]** Formulieren Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts $V \otimes W$.

**7.A2 [2 Punkte]** Zeigen Sie, dass jeder andere Vektorraum, der dieselbe universelle Eigenschaft erfüllt, kanonisch isomorph zu $V \otimes W$ ist.

**7.A3 [3 Punkte]** Verwenden Sie (a) und (b), um zu beweisen, dass

$$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

gilt.

**Lösung:**

1. See Satz 19.4.7. from the Skript.
2. See the proof of Lemma 19.4.8 in the Skript.
3. Consider the map

$$\begin{array}{rccc} \eta: & V^* \times W^* & \to & (V \otimes W)^* \\ & (\ell, \ell') & \mapsto & \eta_{\ell,\ell'} : v \otimes w \mapsto \ell(v) \cdot \ell'(w) \end{array}$$

we check that this map is bilinear. Let $\alpha, \beta \in K$, $\ell, \ell' \in V^*$, $\ell' \in W^*$, then for any $v \otimes w \in V \otimes W$

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\ell+\beta\kappa,\ell'}(v \otimes w) &= (\alpha\ell + \beta\kappa)(v)\ell'(w) = (\alpha\ell(v) + \beta\kappa(v))\ell'(w) \\ &= \alpha\ell(v)\ell'(w) + \beta\kappa(v)\ell'(w) \\ &= \alpha\eta_{\ell,\ell'}(v \otimes w) + \beta\eta_{\kappa,\ell'}(v \otimes w). \end{aligned}$$

It is shown similarly that $\eta$ is linear in the second factor.

Now, assume that $Z$ is a vector space over $K$ and that $\tau : V^* \times W^* \to Z$ is a bilinear map. For bases $\{v_i : 1 \leq i \leq r\}$ of $V$ and $\{w_j : 1 \leq j \leq s\}$ of $W$, $\mathcal{B} := \{e_{ij} = v_i \otimes w_j\}$ is a basis of $V \otimes W$. Denote by $\mathcal{B}^*$ the associated dual basis. We define the following map:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\tau}: & (V \otimes W)^* & \to & Z \\ & \tilde{\tau}(\sum_{i,j} c_{ij} e^*_{ij}) & \mapsto & \sum_{i,j} c_{ij} \tau(v^*_i, w^*_j). \end{array}$$

This map is clearly linear. We check that it makes the desired diagram commute: for $i, k \in \{1, \ldots, r\}$, $j, l \in \{1, \ldots, s\}$, we have that

$$\eta_{v^*_k, w^*_l}(v^*_i \otimes w^*_j) = \begin{cases} 1, & \text{if } i = k \wedge j = l \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

by definition. Hence $\eta_{v^*_k, w^*_l} = e^*_{kl}$ and therefore, since it holds on the basis, we have

$$\tilde{\tau} \circ \eta = \tau.$$

Now, its definition makes it clear that the map $\tilde{\tau}$ is the unique such linear map. It follows that $(V \otimes W)^*$ satisfies the universal property of the tensor product $V^* \otimes W^*$ and therefore that they are isomorphic by (b).