D–MATH

# Prüfung Analysis II: Mehrere Variablen

401-1262-07L

*Nachname*

# XX XX

*Vorname*

# XX XX

*Legi-Nr.*

**XX-XXX-XXX**

*Prüfungs-Nr.*

***002***

*Bitte noch nicht umblättern!*
*Please do not turn the page yet!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*
*Please take note of the information on the answer-booklet.*

# Wahr/Falsch-Fragen – 45 Punkte

**Sie erhalten Aussagen, die entweder wahr (A) oder falsch (B) sein können. Antworten Sie auf dem Antwortblatt.**
***You are given statements that can be either true (A) or false (B). Answer in the Answer Sheet.***

**Aufgabe 1.** Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ und $f(x,y) = \sin(xy) - y^4$.
*Let* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ *and* $f(x,y) = \sin(xy) - y^4$.

**1.1** $U$ ist zusammenhängend.
*$U$ is connected.*

**1.2** $U$ ist einfach zusammenhängend.
*$U$ is simply connected.*

**1.3** $U$ ist kompakt.
*$U$ is compact.*

**1.4** $f(U) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.
$f(U) \subset \mathbb{R}$ *is compact.*

**1.5** $f(U) \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.
$f(U) \subset \mathbb{R}$ *is connected.*

**1.6** Es existieren zwei reelle Zahlen $a < b$, so dass $f(U) = [a, b]$.
*There are two real numbers* $a < b$ *such that* $f(U) = [a, b]$.

**Aufgabe 2.** Gegeben sind $X = [0,1]$ mit der euklidischen Metrik und die Abbildung $f : X \to X$, $f(x) = x^2$.
*You are given* $X = [0,1]$ *with the Euclidean metric and the map* $f : X \to X$, $f(x) = x^2$.

**2.1** Die Abbildung $f$ hat die Lipschitz-Konstante 2.
*$f$ has Lipschitz constant 2.*

**2.2** $X$ und $f$ erfüllen die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.
*$X$ and $f$ satisfy the assumptions of the Banach Fixed Point Theorem.*

**2.3** $f : X \to X$, $f(x) = x^2$, hat Fixpunkte.
$f : X \to X$, $f(x) = x^2$, *has fixed points.*

**Aufgabe 3.** Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $F = (F_1, \ldots, F_n) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, mit $n \geq 2$.
*Let* $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *and* $F = (F_1, \ldots, F_n) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, *with* $n \geq 2$.

**3.1** Es müss die Identität $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ gelten.
*The identity* $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ *necessarily holds for all* $i, j \in \{1, ..., n\}$.

**3.2** Es müss die Identität $\partial_j \partial_i u = \partial_i \partial_j u$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ gelten.
*The identity* $\partial_j \partial_i u = \partial_i \partial_j u$ *necessarily holds for all* $i, j \in \{1, ..., n\}$.

**3.3** Die Funktion $u \circ F$ muss dann zur Differentiationsklasse $C^2$ gehören.
*The function $u \circ F$ is necessarily of class $C^2$.*

**Aufgabe 4.** Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

*Consider the function $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given by*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \textit{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**4.1** $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

**4.2** $\partial_x f(0,0)$ existiert.
$\partial_x f(0,0)$ *exists.*

**4.3** $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

**4.4** $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

**Aufgabe 5.** Nehmen Sie an, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ die Bedingung

$$f(x_1,x_2) = 10x_2 + x_1^2 + x_2^2 + o(|x|^2) \qquad \text{wenn } |x| \to 0$$

erfüllt.
*Assume that $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ satisfies*

$$f(x_1,x_2) = 10x_2 + x_1^2 + x_2^2 + o(|x|^2) \qquad \textit{as } |x| \to 0.$$

**5.1** $(0,0)$ muss ein kritischer Punkt von $f$ sein.
$(0,0)$ *must be a critical point for $f$.*

**5.2** $f(0,0) = 0$.

**5.3** $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) = 1$.

**5.4** $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, wobei $Hf$ die Hesse-Matrix von $f$ bezeichnet.
$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, *where $Hf$ denotes the Hessian matrix of $f$.*

**5.5** $f$ muss bei $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum haben.
*$f$ must have a strict local minimum at $(0,0)$.*

**Aufgabe 6.** Sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ eine Funktion, so dass

$$\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } J\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha+5 & -3 \\ 3 & \alpha-5 \end{pmatrix},$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, und setzen Sie $X = \Phi^{-1}((0,0)^T)$.
*Consider $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ such that*

$$\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } J\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha+5 & -3 \\ 3 & \alpha-5 \end{pmatrix},$$

*for some $\alpha \in \mathbb{R}$, and let $X = \Phi^{-1}((0,0)^T)$.*

**6.1** Für alle $\alpha$, für die $\alpha^2 \neq 25$ gilt, ist die Abbildung $\Phi$ eingeschränkt auf einen hinreichend kleinen Ball um $(0,0)$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild.
*For all $\alpha$ such that $\alpha^2 \neq 25$, the map $\Phi$ restricted to a sufficiently small ball centered at $(0,0)$ is a diffeomorphism onto its image.*

**6.2** Für alle $\alpha$, für die $\alpha^2 \neq 16$ gilt, ist die Abbildung $\Phi$ eingeschränkt auf einen hinreichend kleinen Ball um $(0,0)$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild.
*For all $\alpha$ such that $\alpha^2 \neq 16$, the map $\Phi$ restricted to a sufficiently small ball centered at $(0,0)$ is a diffeomorphism onto its image.*

**6.3** Für $\alpha = 0$, wenn $r > 0$ klein genug ist, ist die Menge $\Phi(B_r)$ offen.
*For $\alpha = 0$, if $r > 0$ is small enough, the set $\Phi(B_r)$ is open.*

**6.4** Für $\alpha = 0$, wenn $r > 0$ klein genug ist, ist das Bild von $\{(x,y) \in B_r \mid y = 0\}$ unter der Abbildung $\Phi$ eine $C^1$-Untermannigfaltigkeit der Dimension 1.
*For $\alpha = 0$, if $r > 0$ is small enough, the image of $\{(x,y) \in B_r \mid y = 0\}$ under the map $\Phi$ is a $C^1$ submanifold of dimension 1.*

**6.5** Für $\alpha = 0$, wenn $r > 0$ klein genug ist, ist das Bild von $\{(x,y) \in B_r \mid y = 0\}$ unter der Abbildung $\Phi$ eine $C^1$-Untermannigfaltigkeit der Dimension 2.
*For $\alpha = 0$, if $r > 0$ is small enough, the image of $\{(x,y) \in B_r \mid y = 0\}$ under the map $\Phi$ is a $C^1$ submanifold of dimension 2.*

**Aufgabe 7.** Betrachten Sie die Abbildung

$$\Psi\colon (x,y,z) \mapsto (z-1, x+2y, x-y).$$

**Hinweis**: Es kann nützlich sein, zuerst die Jacobi-Determinante von $\Psi$ zu berechnen.
*Consider the map*

$$\Psi\colon (x,y,z) \mapsto (z-1, x+2y, x-y).$$

***Note**: It can be useful to compute the Jacobian determinant of $\Psi$ first.*

**7.1** $\mathrm{vol}_3(\Psi^{-1}(E)) = \mathrm{vol}_3(E)$ für alle $E \subset \mathbb{R}^3$, die Jordan-messbar sind.
$\mathrm{vol}_3(\Psi^{-1}(E)) = \mathrm{vol}_3(E)$ *for all $E \subset \mathbb{R}^3$ Jordan measurable.*

**7.2** $\mathrm{vol}_3(\Psi(E)) = 2\,\mathrm{vol}_3(E)$ für alle $E \subset \mathbb{R}^3$, die Jordan-messbar sind.
$\mathrm{vol}_3(\Psi(E)) = 2\,\mathrm{vol}_3(E)$ *for all $E \subset \mathbb{R}^3$ Jordan measurable.*

**7.3** $\mathrm{vol}_3(\Psi(\Psi(E))) = 9\,\mathrm{vol}_3(E)$ für alle $E \subset \mathbb{R}^3$, die Jordan-messbar sind.
*$\mathrm{vol}_3(\Psi(\Psi(E))) = 9\,\mathrm{vol}_3(E)$ for all $E \subset \mathbb{R}^3$ Jordan measurable.*

**Aufgabe 8.** Betrachten Sie die Polar-koordinaten $\Psi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\Psi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
*Consider the polar coordinates $\Psi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ defined by $\Psi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.*

**8.1** $\Psi$, eingeschränkt auf $(0, 2\pi] \times (0, \infty)$, ist injektiv.
*$\Psi$, restricted to $(0, 2\pi] \times (0, \infty)$, is injective.*

**8.2** $\Psi$, eingeschränkt auf $(0, 2\pi] \times (0, \infty)$, ist surjektiv.
*$\Psi$, restricted to $(0, 2\pi] \times (0, \infty)$, is surjective.*

**8.3** Die Jacobi-Determinante $\det J\Psi(\theta, r)$ ist gegeben durch $r^2 \sin\theta\cos\theta$.
*The Jacobian determinant $\det J\Psi(\theta, r)$ is given by $r^2 \sin\theta\cos\theta$.*

**8.4** $\mathrm{vol}_2(B_R) = 2\pi \int_0^R r\,dr$, wobei $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$.
*$\mathrm{vol}_2(B_R) = 2\pi \int_0^R r\,dr$, where $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$.*

**Aufgabe 9.** Für $\alpha > 0$, berechnen Sie das Integral $I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$. Sie können Polar-koordinaten und Partielle Integration verwenden.
*For $\alpha > 0$, compute the integral $I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$. You can use polar coordinates and integration by parts.*

**9.1** $I_1 = \pi$.

**9.2** $I_2 = \frac{\pi}{2}$.

**9.3** $\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha I_\alpha = 0$.

**Aufgabe 10.** Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{(x^2 + y^2)^2},$$

und die ebenen Regionen

$$A := \{x^2 + y^2 \geq 1\}, \quad B := \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

*Consider the function*

$$f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{(x^2 + y^2)^2},$$

*and the planar regions*

$$A := \{x^2 + y^2 \geq 1\}, \quad B := \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

**10.1** $\int_A |f| < \infty$.

**10.2** $\int_B |f| < \infty$.

**10.3** $\int_{\mathbb{R}^2} |f| < \infty$.

**Aufgabe 11.** Betrachten Sie die Vektorfelder

$$X = \sin(x_1)e_1 \text{ und } Y = \frac{-x_2e_1 + x_1e_2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ definiert in } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Beachten Sie, dass $\partial_1 X_2 = \partial_2 X_1$ und $\partial_1 Y_2 = \partial_2 Y_1$ in $U$.
Betrachten Sie auch die beiden Kreise

$$\gamma(t) = (10 + \cos(t), \sin(t)) \text{ und } \sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \text{ für } t \in [0, 2\pi].$$

*Consider the vector fields*

$$X = \sin(x_1)e_1 \textit{ and } Y = \frac{-x_2e_1 + x_1e_2}{x_1^2 + x_2^2} \textit{ defined in } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

*Notice that $\partial_1 X_2 = \partial_2 X_1$ and $\partial_1 Y_2 = \partial_2 Y_1$ in $U$.*
*Consider also the two circles*

$$\gamma(t) = (10 + \cos(t), \sin(t)) \textit{ and } \sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \textit{ for } t \in [0, 2\pi].$$

**11.1** Es existiert $u \in C^1(U)$, so dass $\nabla u = X$ in $U$.
*There exists $u \in C^1(U)$ such that $\nabla u = X$ in $U$.*

**11.2** Es existiert $v \in C^1(U)$, so dass $\nabla v = Y$ in $U$.
*There exists $v \in C^1(U)$ such that $\nabla v = Y$ in $U$.*

**11.3** $\int_\gamma X \cdot d\gamma = 0.$

**11.4** $\int_\sigma Y \cdot d\sigma = 0.$

**11.5** $\int_\gamma Y \cdot d\gamma = 0.$

**11.6** $\int_\sigma X \cdot d\sigma = 0.$

# Kästchenaufgaben – 16 Points

**Nur die endgültigen Antworten werden im "Alles-oder-Nichts"-Modus bewertet. Jede Frage ist 4 Punkte wert.**

*Only the final answers will be graded in an "All-Or-Nothing" fashion. Each question is worth 4 points.*

**Kästchenaufgabe 1.** [**4 Punkte**] Geben Sie ein explizites Beispiel für einen metrischen Raum $(X, d)$ an, der nicht vollständig ist. Geben Sie dabei sowohl die Menge $X$ als auch die Distanzfunktion $d$ klar an.

*Give an explicit example of a metric space $(X, d)$ which is not complete. Specify clearly both the set $X$ and the distance function $d$.*

**Kästchenaufgabe 2.** [**4 Punkte**] Geben Sie ein explizites Beispiel für eine lineare Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die sich von der Identität unterscheidet und die folgende Bedingung erfüllt:

$$\mathrm{vol}_2(\Phi(E)) = \mathrm{vol}_2(E) \text{ für alle } E \subset \mathbb{R}^2 \text{ Jordan-messbar.}$$

*Give an explicit example of a linear map $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, different from the identity, such that*

$$\mathrm{vol}_2(\Phi(E)) = \mathrm{vol}_2(E) \textit{ for all } E \subset \mathbb{R}^2 \textit{ Jordan measurable.}$$

**Kästchenaufgabe 3.** [**4 Punkte**] Geben Sie ein explizites Beispiel für ein nicht-konstantes, konservatives Vektorfeld $V \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ an.

*Give an explicit example of a nonconstant conservative vector field $V \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ in some open set $U \subset \mathbb{R}^3$.*

**Kästchenaufgabe 4.** [**4 Punkte**] Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Geben Sie ein explizites Beispiel für $F \in C^0(\mathbb{R}^2)$ an, sodass der Satz von Cauchy-Lipschitz **nicht** um $(0, 0)$ angewendet werden kann.

*Consider the first order ODE*

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

*Give an explicit example of $F \in C^0(\mathbb{R}^2)$ such that the Cauchy-Lipschitz theorem* **cannot** *be applied around* $(0, 0)$.

# Kurzproblem 1 – 12 Punkte

**Kurzproblem 1.**
*Short Problem 1.* Für ein Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, betrachten Sie die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_\alpha(x,y) = e^x(x^2 + \alpha y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Given a parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, consider the function $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$f_\alpha(x,y) = e^x(x^2 + \alpha y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. [**4 Punkte**] Bestimmen Sie für alle möglichen $\alpha \in \mathbb{R}$ die kritischen Punkte von $f_\alpha$.
   *For all possible $\alpha \in \mathbb{R}$, calculate the critical points of $f_\alpha$.*

2. [**4 Punkte**] Bestimmen Sie für alle möglichen $\alpha \neq 0$ die Hessian-Teste an allen kritischen Punkten, die Sie in (i) gefunden haben.
   *For all possible $\alpha \neq 0$, run the Hessian test at all the critical points you found in (i).*

3. [**4 Puntke**] Bestimmen Sie für alle möglichen $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $f_\alpha(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$. Beweisen Sie Ihre Aussage rigoros.
   *For all possible $\alpha \in \mathbb{R}$, determine the set $f_\alpha(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$. Prove rigorously your claim.*

# Kurzproblem 2 – 12 Punkte

**Kurzproblem 2.** Betrachten Sie die Menge

$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + x^2 + y^2 < z,\ z < 5\},$$

die Fläche

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + x^2 + y^2 = z,\ z < 5\},$$

und die Vektorfelder

$$E(x, y, z) := (xz, 2y - yz, x^2 + y^2)^T, \quad A(x, y, z) := (-ye^z, xe^z, e^z)^T.$$

*Consider the region*

$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + x^2 + y^2 < z,\ z < 5\},$$

*the surface*

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + x^2 + y^2 = z,\ z < 5\},$$

*and the vector fields*

$$E(x, y, z) := (xz, 2y - yz, x^2 + y^2)^T, \quad A(x, y, z) := (-ye^z, xe^z, e^z)^T.$$

1. [**1 Punkt**] Skizzieren Sie $M$ in 3D-Perspektive und beschriften Sie die Achsen.
   *Sketch $M$ in 3D perspective and label the axes.*

2. [**5 Punkte**] Berechnen Sie den äusseren Fluss von $E$ über $M$ (nehmen Sie den Normalenvektor zu $M$, der nach aussen aus $U$ zeigt).
   *Compute the outer flow of $E$ across $M$ (take the normal vector to $M$ to point outside of $U$).*

3. [**6 Punkte**] Berechnen Sie den äusseren Fluss von rot $A$ über $M$ (nehmen Sie den Normalenvektor zu $M$, der nach aussen aus $U$ zeigt).
   *Compute the outer flow of* curl $A$ *across $M$ (take the normal vector to $M$ to point outside of $U$).*

**Hinweis:** Falls erforderlich, dürfen Sie den Divergenzsatz in einem stückweise glatten Bereich ohne Beweis verwenden.
***Note:*** *If needed, you may use the divergence theorem in a piecewise smooth domain without proof.*

# Problem 3 – 15 Punkte

**Jede Frage kann in den folgenden Fragen verwendet werden, auch ohne Beweis.**
*Each question can be used in the subsequent ones, even without proof.*

**Problem 3. [15 Punkte]** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränkter $C^1$-Bereich und sei $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$.
**Hinweis:** Es wird nicht angenommen, dass $\Phi$ ein Diffeomorphismus ist.
*Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded $C^1$ domain and let $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$.*
***Note:*** *$\Phi$ is not assumed to be a diffeomorphism.*

1. **[2 Punkte]** Betrachten Sie das Vektorfeld $V \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, definiert durch

$$V = (\Phi_1 \partial_1 \Phi_2, \Phi_1 \partial_2 \Phi_2) = \Phi_1 \nabla \Phi_2.$$

Beweisen Sie, dass

$$\operatorname{rot} V(x) = \det J\Phi(x) \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}.$$

*Consider the vector field $V \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ defined by*

$$V = (\Phi_1 \partial_1 \Phi_2, \Phi_1 \partial_2 \Phi_2) = \Phi_1 \nabla \Phi_2.$$

*Prove that*

$$\operatorname{curl} V(x) = \det J\Phi(x) \textit{ for all } x \in \overline{\Omega}.$$

2. **[5 Punkte]** Sei $\Psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, so dass $\Phi(x) = \Psi(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega \det J\Phi(x)\, dx = \int_\Omega \det J\Psi(x)\, dx.$$

[**Hinweis**: Verwenden Sie die Formel von Green (d.h. das 2D-Stokes-Theorem) in der Ebene.]
*Let $\Psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ such that $\Phi(x) = \Psi(x)$ for all $x \in \partial\Omega$. Show that*

$$\int_\Omega \det J\Phi(x)\, dx = \int_\Omega \det J\Psi(x)\, dx.$$

*[**Hint**: Use Green's formula (i.e., 2D Stokes) on the plane]*

3. **[2 Punkte]** Nehmen Sie an, dass $\Omega = B_1$ der Einheitsball ist und $\Phi(x) = x$ für alle $x \in \partial B_1$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{B_1} |\det J\Phi| \geq \pi.$$

*Assume that $\Omega = B_1$ is the unit ball and that $\Phi(x) = x$ for all $x \in \partial B_1$. Show that*

$$\int_{B_1} |\det J\Phi| \geq \pi.$$

4. [**4 Punkte**] Nehmen Sie an, dass $\Omega = B_1$ der Einheitsball ist und $\Phi(x) = x$ für alle $x \in \partial B_1$. Zeigen Sie, dass $\Phi(\overline{B_1})$ nicht im Rand $\partial B_1$ enthalten sein kann.
*Assume that $\Omega = B_1$ is the unit ball and that $\Phi(x) = x$ for all $x \in \partial B_1$. Show that $\Phi(\overline{B_1})$ cannot be contained in the boundary $\partial B_1$.*

5. [**2 Punkte**] Nehmen Sie an, dass $\Omega = B_1$ der Einheitsball ist und $\Phi(x) = x$ für alle $x \in \partial B_1$. Zeigen Sie, dass $0 \in \Phi(\overline{B_1})$. [**Hinweis**: Betrachten Sie $\tilde{\Phi}(x) := \frac{\Phi(x)}{|\Phi(x)|}$]
*Assume that $\Omega = B_1$ is the unit ball and that $\Phi(x) = x$ for all $x \in \partial B_1$. Show that $0 \in \Phi(\overline{B_1})$. [**Hint**: Consider $\tilde{\Phi}(x) := \frac{\Phi(x)}{|\Phi(x)|}$]*

6. [**BONUSFRAGE – 6 Zusatzpunkte**] Zeigen Sie, dass $\overline{B_1} \subset \Phi(\overline{B_1})$.
*[**BONUS QUESTION – 6 Extra Points**] Show that $\overline{B_1} \subset \Phi(\overline{B_1})$.*

# Formeln und Notationen

**Nützliche Formeln und Notationen.**

- $e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.
- $B_r(x)$ bezeichnet der offene euklidische Ball mit Radius $r > 0$ um den Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. $B_r$ bezeichnet der Ball $B_r(0)$.
- Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann ist das Vektorfeld $X \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ **konservativ**, genau dann, wenn es ein $u \in C^1(U)$ gibt, so dass $\nabla u = X$.
- Ist $A = (A_1, A_2, A_3)^T$ ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$, dann gilt

$$\operatorname{rot} A = (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^T.$$

- Ist $V = (V_1, V_2)^T$ ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^2$, dann gilt

$$\operatorname{rot} V = \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1.$$

***Useful formulas and notation.***

- *$e_1, \ldots, e_n$ denote the standard basis of $\mathbb{R}^n$.*
- *$B_r(x)$ denotes the open Euclidean ball of radius $r > 0$ and center $x \in \mathbb{R}^n$. Also, $B_r$ denotes $B_r(0)$.*
- *If $U \subset \mathbb{R}^n$ is open then the vector field $X \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ is **conservative** if and only if there is $u \in C^1(U)$ such that $\nabla u = X$.*
- *If $A = (A_1, A_2, A_3)^T$ is a vector field in $\mathbb{R}^3$ then*

$$\operatorname{curl} A = (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^T.$$

- *If $V = (V_1, V_2)^T$ is a vector field in $\mathbb{R}^2$ then*

$$\operatorname{curl} V = \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1.$$