ANALYSIS II - MOCK EXAM - 180 MIN

Die Gesamtnote der Prüfung auf einer Skala von 1-6 wird berechnet, indem $1 + 5P/140$ gerundet wird, wobei P die erreichte Punktzahl ist (denken Sie daran, dass zusätzlich Ihr eventueller Bonus aus den Übungsaufgaben hinzugefügt wird).

1. Multiple Choice (MC) — 60 Punkte

Jede Aufgabe enthält einige Fragen, die entweder richtig oder falsch sein können. Jede richtige Antwort ist 1 Punkt wert. Jede unbeantwortete Frage ist 0 Punkte wert. Nennen wir N_{wrong} die Anzahl der falschen Antworten, wird die entsprechende Strafpunkte wie folgt berechnet:

$$\textbf{Strafpunkte} = \begin{cases} -0 \textbf{ Punkte} & \textbf{wenn } 0 \leq N_{\text{wrong}} \leq 10; \\ -N_{\text{wrong}} + 10 \textbf{ Punkte} & \textbf{wenn } 11 \leq N_{\text{wrong}} \leq 20; \\ -2N_{\text{wrong}} + 30 \textbf{ Punkte} & \textbf{wenn } 21 \leq N_{\text{wrong}} \leq 30. \end{cases}$$

Die Anzahl der Punkte im MC-Teil wird als die Anzahl der richtigen Antworten plus der Strafpunkte berechnet. Nichtsdestotrotz wird die endgültige Punktzahl des MC-Teils niemals negativ sein (sie wird bei null gedeckelt).

Exercise 1. Sei $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ und $f(x, y) = \sin(xy) - y^4$. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) U ist zusammenhängend. Wahr / Falsch
(2) U ist einfach zusammenhängend. Wahr / Falsch
(3) U ist kompakt. Wahr / Falsch
(4) $f(U) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt. Wahr / Falsch
(5) $f(U) \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Wahr / Falsch
(6) Es gibt zwei reelle Zahlen $a < b$, sodass $f(U) = [a, b]$. Wahr / Falsch

Exercise 2. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ mit $X \neq \emptyset$ und $X \neq \mathbb{R}^2$.

(1) Wenn X nicht offen ist, dann ist es notwendigerweise abgeschlossen. Wahr / Falsch
(2) Wenn X konvex ist, dann ist es notwendigerweise zusammenhängend. Wahr / Falsch
(3) Wenn X beschränkt ist, dann ist es notwendigerweise kompakt. Wahr / Falsch
(4) Wenn X vollständig ist, dann ist es notwendigerweise abgeschlossen. Wahr / Falsch

Exercise 3. Sie erhalten einige Paare (X, f), wobei $f : X \to X$ eine kontinuierliche Funktion ist und X ein metrischer Raum ist.

(1) Wenn $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ und $f(x) := \sin(2x)$, dann sind die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt. Wahr / Falsch
(2) Wenn $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ und $f(x) := x + x^2$, dann sind die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt. Wahr / Falsch
(3) Wenn $X = [0, \infty)$ und $f(x) = \frac{x}{100+2x}$, dann sind die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt. Wahr / Falsch

Exercise 4. Welche der folgenden Formeln sind für alle glatten Funktionen $u, v : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ korrekt?

(1) $\partial_i(e^{u^2}) = e^{u^2} 2u\partial_i u$. Wahr / Falsch
(2) $\partial_i \nabla u = \nabla \partial_i u$. Wahr / Falsch
(3) $\partial_i(u/v) = (\partial_i u/v) + (u/\partial_i v)$. Wahr / Falsch

(4) $\operatorname{div}(u\nabla u) = |\nabla u|^2 + uHu$, wobei Hu die Hesse-Matrix von u ist. Wahr / Falsch

Exercise 5. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y,z) := \frac{xy^2}{x^2+y^2+z^2}$ für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, und $f(0,0,0) = 0$. Dann ist f von der Klasse

(1) $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Wahr / Falsch
(2) $C^0(\mathbb{R}^3)$. Wahr / Falsch
(3) $C^1(\mathbb{R}^3)$. Wahr / Falsch

Exercise 6. Angenommen, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ erfüllt

$$f(x) = x_1^2 + x_3^4 + o(|x|^5) \qquad \text{wenn } |x| \to 0,$$

wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$. Dann können wir folgern, dass

(1) $\nabla f(0) = (0,0,0)^T$. Wahr / Falsch
(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) = 1$. Wahr / Falsch
(3) $\partial_{x_1}\partial_{x_2} f(0) = 0$. Wahr / Falsch
(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x) = 0$. Wahr / Falsch

Exercise 7. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass

$$\nabla f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } Hf(0) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei Hf die Hesse-Matrix bezeichnet. Dann gilt

(1) für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, 0 ist kein lokales Maximum von f. Wahr / Falsch
(2) für alle $\alpha > \sqrt{2}$, 0 ist ein Sattelpunkt von f. Wahr / Falsch
(3) für alle $\alpha < \sqrt{2}$, 0 ist ein lokales Minimum von f. Wahr / Falsch
(4) für $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$, die Funktion $\nabla f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ein Diffeomorphismus zwischen einer offenen Menge, die Null enthält, und einer anderen offenen Menge, die $\nabla f(0)$ enthält. Wahr / Falsch

Exercise 8. Betrachten Sie die Menge $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + y^2 = x^3 + x\}$.

(1) V ist ein Graph bezüglich der x-Variablen um $(1,1)$. Wahr / Falsch
(2) V ist ein Graph bezüglich der y-Variablen um $(0,0)$. Wahr / Falsch
(3) V ist ein Graph bezüglich der y-Variablen um $(1,1)$. Wahr / Falsch
(4) V ist ein Graph bezüglich der x-Variablen um $(0,0)$. Wahr / Falsch

Exercise 9. Betrachten Sie $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, sodass

$$F(0,0,1) = (2,-2)^T \text{ und } JF(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

und sei $M := F^{-1}((2,-2)^T)$. Für $t < 1$ sei $\gamma(t) := (\sin(2t), t + \frac{1}{2}t^2, \frac{\cos(t)}{1-t})$.

(1) $(F \circ \gamma)'(0) = (0,0)^T$. Wahr / Falsch
(2) In einer kleinen Nachbarschaft des Punktes $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ ist M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 2. Wahr / Falsch
(3) In einer kleinen Nachbarschaft des Punktes $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ ist M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 1. Wahr / Falsch
(4) Der Vektor $\gamma'(0)$ ist normal zu M am Punkt $(0,0,1)$.
(5) Es existieren $\phi, \psi \in C^1((-\delta,\delta), \mathbb{R})$, sodass

$$F(\phi(y), y, \psi(y)) = (2,-2)^T \quad \text{für alle } y \in (-\delta,\delta). \qquad \text{Wahr / Falsch}$$

(6) Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ muss die Menge $F(B_\varepsilon((0,0,1)))$ offen in $\mathbb{R}^2$ sein. Wahr / Falsch

Exercise 10. Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = (x+1)\log(x^2+y^2),$$

und die Bereiche

$$A := \{x^2+y^2 \geq 1\}, \quad B := \{0 < x^2+y^2 \leq 1\}.$$

(1) $\int_A |f| < \infty$. Wahr / Falsch
(2) $\int_B |f| < \infty$. Wahr / Falsch
(3) $\int_A |g| = \infty$. Wahr / Falsch
(4) $\int_B |g| = \infty$. Wahr / Falsch

Exercise 11. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, betrachten Sie die Abbildungen

$$\Phi\colon (x,y) \mapsto (xy, x^2-y^2) \text{ und } \Psi\colon (x,y) \mapsto (x+y, \alpha x - y, y+1).$$

(1) Wenn $E \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, dann gilt $\mathrm{vol}_2(\Phi(E)) = 2\int_E (x^2+y^2)\,dxdy$. Wahr / Falsch
(2) Wenn $E \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, dann gilt $\mathrm{vol}_2(\Phi(E)) = 2\int_E (x^2+2y^2)\,dxdy$. Wahr / Falsch
(3) Wenn $E \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, dann gilt $\mathrm{vol}_2(\Psi(E)) = 2\alpha\mathrm{vol}_2(E)$. Wahr / Falsch
(4) Wenn $E \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, dann gilt $\mathrm{vol}_2(\Psi(E)) = \sqrt{2}|\alpha+1|\mathrm{vol}_2(E)$. Wahr / Falsch
(5) Wenn $E \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, dann gilt $\mathrm{vol}_2(\Psi(E)) = \sqrt{2(\alpha^2+\alpha+1)}\mathrm{vol}_2(E)$. Wahr / Falsch

Exercise 12. Für $\alpha \geq 0$ betrachten Sie das Integral $I_\alpha := \int_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-\alpha|z|}\,dx\,dy\,dz$.

(1) $I_0 = \sqrt{\pi}$. Wahr / Falsch
(2) $\alpha I_\alpha = I_1$. Wahr / Falsch
(3) $\lim_{\alpha\to+\infty}(\alpha+\sqrt{\alpha})I_\alpha = 2\pi$. Wahr / Falsch

Exercise 13. Betrachten Sie die Vektorfelder

$$X := x_1 e_1, \quad Y := x_2 e_1 \text{ und } Z := \frac{-x_2 e_1 + x_1 e_2}{x_1^2+x_2^2},$$

alle definiert in $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei $\gamma \in C^1([0,1], U)$ eine beliebige geschlossene Kurve.

(1) Es gibt notwendigerweise ein $u \in C^1(U)$, sodass $\nabla u = X$ in U. Wahr / Falsch
(2) Es gibt notwendigerweise ein $v \in C^1(U)$, sodass $\nabla v = Y$ in U. Wahr / Falsch
(3) Es gibt notwendigerweise ein $w \in C^1(U)$, sodass $\nabla w = Z$ in U. Wahr / Falsch
(4) Notwendigerweise gilt $\int_\gamma X \cdot d\gamma = 0$. Wahr / Falsch
(5) Notwendigerweise gilt $\int_\gamma Y \cdot d\gamma = 0$. Wahr / Falsch
(6) Notwendigerweise gilt $\int_\gamma Z \cdot d\gamma = 0$. Wahr / Falsch

Exercise 14. Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(0) = \alpha.$$

Für jede der folgenden Wahlmöglichkeiten von F und α, sagen Sie, ob Sie den Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelöf Satz verwenden können, um für ein kleines $\delta > 0$ die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

$$x \mapsto y(x), \quad x \in I := (-\delta, \delta)$$

abzuleiten.

(1) $F(x,y) = y^2, \alpha = 0$ Wahr / Falsch
(2) $F(x,y) = x\log y, \alpha = 1$ Wahr / Falsch
(3) $F(x,y) = y + \sqrt{|x|}, \alpha = 0$ Wahr / Falsch
(4) $F(x,y) = x\log y, \alpha = 0$ Wahr / Falsch

2. Box Answer — 20 Punkte

Nur die endgültige Antwort wird in einer "Alles-oder-Nichts"-Art bewertet.

Exercise 15 (2 Punkte)**.** Sei $X := \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$. Geben Sie ein Beispiel für eine nichtkonstante $\frac{1}{2}$-Lipschitz-Kontraktion $f \colon X \to X$.

Exercise 16 (2 Punkte)**.** Geben Sie ein explizites Beispiel für eine stetige und nichtkonstante Funktion $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^2$, sodass $g^{-1}(K)$ **nicht** kompakt ist.

Exercise 17 (2 Punkte)**.** Geben Sie ein explizites Beispiel für eine C^∞ bijektive Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass die Inverse g^{-1} nicht von der Klasse C^1 ist.

Exercise 18 (3 Punkte)**.** Geben Sie ein explizites Beispiel für eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit folgenden Eigenschaften: $f^{-1}(K)$ ist kompakt, wann immer $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, und f ist **nicht** ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$.

Exercise 19 (2 Punkte)**.** Skizzieren Sie zwei offene zusammenhängende Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$, sodass $U_1 \cap U_2$ nicht zusammenhängend ist und $U_1 \cup U_2$ zusammenhängend ist.

Exercise 20 (3 Punkte)**.** Geben Sie ein explizites Beispiel für eine Funktion in $C^2(\mathbb{R}^3) \setminus C^3(\mathbb{R}^3)$.

Exercise 21 (3 Punkte)**.** Sei $\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Geben Sie die Formel für den Normalenvektor $N \in \mathbb{R}^4$ an der Graphenstelle $\phi(X)$, wobei $X = (x_1, x_2, x_3, \phi(x)) \in \mathbb{R}^4$.

Exercise 22 (3 Punkte)**.** Geben Sie ein explizites Beispiel für eine glatte nichtkonstante Kurve $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, sodass $\gamma(\mathbb{R})$ **nicht** eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

3. Kurzprobleme – 40 Punkte

Um die volle Punktzahl zu erhalten, müssen Sie alle Ihre Behauptungen streng beweisen. Jede Frage wird einzeln bewertet, daher können Sie annehmen, dass die Ergebnisse anderer Fragen gegeben sind, auch wenn Sie sie nicht gelöst haben.

Exercise 23 (11pt)**.** Sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f : K \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{\alpha x},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(1) Beweisen Sie, dass f ein Maximum und Minimum auf K annimmt. [2pt]
(2) Berechnen Sie alle kritischen Punkte von f im Inneren von K, in Abhängigkeit vom Parameter α. [4pt]
(3) Berechnen Sie die Minimal- und Maximalwerte von f auf K, in Abhängigkeit vom Parameter α. [5pt]

Exercise 24 (11pt)**.** Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. [3pt]
(2) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung im Fall $f(x) = e^{-2x}$. [3pt]

Betrachten Sie das lineare System

$$z'(t) = Az(t), \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(1) Lösen Sie das System für $\alpha = -1$ und $z(0) = (1,1)^T$. [5pt]
(2) Bestimmen Sie die Menge der α, für die unabhängig von der Anfangsbedingung $z(0)$, $|z(t)|$ für $t \to +\infty$ beschränkt bleibt. [5pt]

Exercise 25 (18pt)**.** Betrachten Sie die Region

$$U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 < x, 1 < x < 4\},$$

die Fläche

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = x, 1 < x < 4\},$$

und die Vektorfelder

$$E(x,y,z) := (x^2 - 5x + 4, -2xy, z)^T, \quad B(x,y,z) := (x^2, -yx, -zx)^T.$$

(1) Skizzieren Sie den Schnitt von U mit der Ebene $\{y = 0\}$ und mit der Ebene $\{x = 0\}$. Diskutieren Sie die Symmetrien von U. Skizzieren Sie U in 3D-Perspektive mit der z-Achse nach oben, der x-Achse nach rechts und der y-Achse nach oben-rechts. [4 pt]
(2) Finden Sie ein Vektorfeld A, sodass

$$B = \operatorname{curl} A,$$

und berechnen Sie die Divergenz von B. [4pt]

(Hinweis: Versuchen Sie es mit $A = (0, -zf(x), yg(x))^T$, für einige einfache Funktionen $f(x), g(x)$, die Sie finden müssen.)
(3) Berechnen Sie den Fluss von E durch M (die Normale von M zeigt nach außen von U). [4pt] (Falls erforderlich, können Sie den Divergenzsatz in einem stückweise glatten Bereich ohne Beweis verwenden.)
(4) Berechnen Sie den Fluss von B durch M (die Normale von M zeigt nach außen von U). [6pt]

4. Problem — 20 Punkte

Um die volle Punktzahl zu erhalten, müssen Sie alle Ihre Behauptungen streng beweisen. Jede Frage wird separat bewertet, daher können Sie davon ausgehen, dass die Ergebnisse anderer Fragen gegeben sind, auch wenn Sie sie nicht gelöst haben.

Problem 26 (20pt)**.** Definieren Sie

$$\eta(t) := \begin{cases} \frac{\exp(-\tan^2 t)}{\cos^2 t} & \text{für } t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \text{für } t \in \mathbb{R} \setminus (-\pi/2, \pi/2). \end{cases}$$

und, für alle $\varepsilon > 0$ und $t \in \mathbb{R}$,

$$\eta_\varepsilon(t) := \frac{1}{c_0 \varepsilon} \eta(t/\varepsilon), \qquad c_0 := \int_{\mathbb{R}} \eta(s)\, ds.$$

Sei $L = p(d/dt)$ ein linearer autonomer Differentialoperator der Ordnung $m \geq 1$, mit charakteristischem Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$.

Angenommen, $u \in C^m(\mathbb{R})$ ist eine Lösung einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung $Lu(t) = f(t)$ im gesamten $\mathbb{R}$, wobei $f \in C^0(\mathbb{R})$ eine gegebene Funktion ist.

Definieren Sie

$$u_\varepsilon(t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(s)\eta_\varepsilon(t-s)\, ds \text{ und } f_\varepsilon(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\eta_\varepsilon(t-s)\, ds.$$

(1) Beweisen Sie, dass η_ε zu $C^1(\mathbb{R})$ gehört und kompakten Träger in $[-\pi\varepsilon/2, \pi\varepsilon/2]$ hat. Wie würden Sie beweisen, dass $\eta_\varepsilon \in C^\infty$ ist? [4pt]
(2) Beweisen Sie, dass u_ε von Klasse C^∞ ist und die ODE $Lu_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t)$ löst. [4 pt]

(3) Berechnen Sie c_0 und beweisen Sie, dass $\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(t)\, dt = 1$ für alle $\varepsilon > 0$. [4 pt]

(4) Beweisen Sie, dass für jede Funktion in polyexponentieller Form $v(t) = \sum q_i(t) \exp(\alpha_i t)$, wobei $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und $q_i \in \mathbb{C}[X]$, die Funktionen $v_\varepsilon(t) := \int_{-\infty}^{\infty} v(s)\eta_\varepsilon(t-s)\, ds$ ebenfalls polyexponentielle Form haben. [4 pt]

(5) Beweisen Sie, dass für alle $T > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \max_{[-T,T]} |u_\varepsilon - u| \to 0 \text{ für } k \to \infty. \text{ [4 pt]}$$

5. Nützliche Formeln und Notation

In der gesamten Prüfung wird folgende Standardnotation verwendet:

- $e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.
- In $\mathbb{R}^2$ ist ein "Graph bezüglich der x-Variablen" jede Menge der Form $\{(x, \phi(x)) : x \in I\}$ für ein Intervall I und eine Funktion $\phi\colon I \to \mathbb{R}$.
- $B_r(x)$ bezeichnet die offene euklidische Kugel mit Radius $r > 0$ und Zentrum $x \in \mathbb{R}^n$.

Sie können die folgenden Formeln als gegeben annehmen:

- $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.
- Wenn $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $m \geq n$, und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, dann
$$\mathrm{vol}_n(\Phi(K)) = \int_K \{\det(J\Phi(x)^T \cdot J\Phi(x))\}^{\frac{1}{2}}\, dx.$$
wobei $J\Phi$ die Jacobi-Matrix ist, und $\partial_{x_i}\Phi^j(x)$ in der Spalte i und Zeile j steht.
- Wenn $A = (A_1, A_2, A_3)^T$ ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$ ist, dann
$$\mathrm{curl}\, A = (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^T$$
- $\frac{d}{dt}(\tan t) = \frac{1}{\cos^2 t}$.