Problems marked with a (*) are a bit more complex and can be skipped at a first read.

If you don't have a lot of time focus on the Problems marked with (♡).

10.1. BONUS PROBLEM. Berechnen Sie den Flächeninhalt des sphärischen Vierecks $S \subset \mathbb{S}^2$, das von den Meridianen $-\pi < \phi_1 < \phi_2 < \pi$ und den Breitenkreisen $-\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$ begrenzt wird.

10.2. Die Oberfläche eines Torus. Sei $S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$ und $T = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, d_S(x) \leq 1\}$, wobei $d_S(x) = \inf\{|x - y| \,|\, y \in S\}$ den minimalen Abstand von S zu $x \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Parametrisieren Sie ∂T und berechnen Sie dann den Flächeninhalt.

10.3. Solids of revolution. *heartsuit* Gegeben $f \in C^2((a, b)) \cap C([a, b])$, so dass $f \geq 0$, definieren Sie die *Rotationskörper um die x-Achse* als

$$\Omega := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a < x < b, \sqrt{y^2 + z^2} < f(x)\right\},$$
$$\partial_{\text{side}}\Omega := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a < x < b, \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)\right\},$$

1. Sag, ob $\Omega, \partial_{\text{side}}\Omega$ offene/geschlossene/verbundene Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind.
2. Zeigen Sie, dass $\text{vol}_3(\Omega) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$,
3. Zeigen Sie, dass $\text{vol}_2(\partial_{\text{side}}\Omega) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} f(x) dx$. Tipp: Parametrisieren Sie $(x, \theta) \mapsto (x, f(x) \cos\theta, f(x) \sin\theta)$.
4. Berechnen Sie das Volumen und den Flächeninhalt des "unechten Rotationskörpers", der entsteht, wenn $f(x) = 1/x, a = 1, b = \infty$.
5. (*) Zeigen Sie, dass Ω ein begrenztes C^1-Gebiet (wie in Definition 14.3) ist, wenn und nur wenn

$$f(x) > 0 \text{ in } (a, b), \quad f'(a^+) = +\infty, \quad f'(b^-) = -\infty.$$

10.4. Traktix. Betrachten Sie die ebene Kurve $\sigma \colon (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\sigma(t) := (\sin(t), \cos(t) + \log\tan(t/2))$.

1. ♡ Berechnen Sie die Länge $L(\sigma|_{[\epsilon,\pi/2]})$ und untersuchen Sie ihr Verhalten für $\epsilon \to 0^+$.
2. Für jedes $t \in (0, \pi)$ betrachten Sie das Segment I_t tangent an σ in t und das den Punkt $\sigma(t)$ mit der y-Achse verbindet. Zeigen Sie, dass die Länge von I_t immer 1 ist, unabhängig von t.
3. (*) Sagen Sie, ob die Menge $\sigma((0, \pi)) \subset \mathbb{R}^2$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Hinweis: Wie wäre ihr Tangentialraum um den Punkt $\sigma(\pi/2)$.

10.5. Logarithmische Spirale. Betrachte für $a > 0, b < 0$ die ebene Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) := (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t).$$

1. ♡ Berechne $L(\gamma|_{[0,T]})$ und untersuchen Sie ihr Verhalten für $T \to \infty$.
2. Drücke die Menge $\gamma(\mathbb{R})$ in Polarkoordinaten aus und skizziere sie.
3. (*) Geben Sie an, ob $\gamma(\mathbb{R})$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

10.6. Trägheitsmoment eines Ellipsoids.

1. Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante der Abbildung

$$\Phi\colon \{(s,t) : s > 0,\, 0 < t < 2\pi\} \to \mathbb{R}^2, \quad (s,t) \mapsto (as\cos(t), bs\sin(t))$$

   in Abhängigkeit der Parameter $a, b > 0$.
2. Berechnen Sie das polare Trägheitsmoment $J_0 = \int_B x^2 + y^2 \, d\mathrm{Vol}(x,y)$ der Ellipse $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$ mit Halbachsen $a, b > 0$.