1.1. Beispiele und Nicht-Beispiele von metrischen Räumen.

Welche der folgenden Paare sind metrische Räume? Beweisen Sie es oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. $(B(X), d)$, wobei $B(X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen von einer nichtleeren Menge X nach $\mathbb{R}$ ist und
$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$
2. $(\mathbb{Q}_+, d)$, wobei $\mathbb{Q}_+$ die positiven rationalen Zahlen sind und $d(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.
3. $(\mathbb{R}^2, d)$, wobei $d(x, y) := (x_1 - y_1)^2 + |x_2 - y_2|$.
4. $(\mathbb{R}^2, d)$, wobei $d(x, y) := |x_1 - y_1|^{1/2} + |x_2 - y_2|$.
5. $(\mathbb{R}^{n\times n}, d)$ mit $d(X, Y) := \Big(\mathrm{Tr}\{(X - Y)^T (X - Y)\}\Big)^{1/2}$.
6. $(\mathbb{R}^{n\times n}, d)$ mit
$$d(X, Y) := \sup\{|v^T (X - Y)v| : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1\},$$
und $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der quadratischen Matrizen bezeichnet.
7. $(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, d)$, wobei der flache 2-dimensionale Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ die Menge der Äquivalenzklassen von Paaren von reellen Zahlen unter der Äquivalenzrelation
$$x, y \in \mathbb{R}^2, x \sim y \Leftrightarrow x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}, x_2 - y_2 \in \mathbb{Z},$$
ist und $d([x], [y]) := \inf_{k,h\in\mathbb{Z}} \|x - y + (k, h)\|$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Entfernung bezeichnet und $[x] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ die Äquivalenzklasse von $x \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet.

1.2. Multiple choice. Nehmen Sie eine Menge X und zwei Abstände d_1, d_2, sodass Sie wissen, dass (X, d_1) und (X, d_2) beide metrische Räume sind. Wählen Sie alle Aussagen unten aus, die zwangsläufig wahr sind.

(a) $(X, d_1 + 4d_2)$ ist ein metrischer Raum.

(b) $(X, d_1 \cdot d_2)$ ist ein metrischer Raum.

(c) $(X, \max\{d_1, d_2\})$ ist ein metrischer Raum.

(d) $(X, \min\{d_1, d_2\})$ ist ein metrischer Raum.

1.3. Multiple choice. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y_1, Y_2 \subset X$ Teilmengen. Wählen Sie alle Aussagen unten aus, die notwendigerweise wahr sind.

(a) $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$

(b) $\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} \subset \overline{Y_1 \cap Y_2}$

(c) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subset \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

(d) $\overline{Y_1 \cap Y_2} = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

1.4. Multiple choice. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge. Wir definieren die Funktion "Abstand von A" als

$$d(\cdot, A) : X \to [0, \infty), \quad d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Wählen Sie alle untenstehenden Aussagen aus, die notwendigerweise wahr sind.

(a) If A is closed and $x \in A^c$, then $d(x, A) > 0$.

(b) The set $M := \{x \in X : d(x, A) \geq 1\}$ is closed in X.

(c) For $x, y \in X$, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ holds.

(d) If A° is non-empty and $x \in X$, then $d(x, A) = d(x, A^\circ)$.

1.5. Grenze, Inneres etc. Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand der folgenden Teilmengen Y von $\mathbb{R}$ für die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Es ist nicht erforderlich, die Antwort zu rechtfertigen.

(1) $Y = [0, 1]$
(2) $Y = \mathbb{Q}$
(3) $Y = \emptyset$
(4) $Y = (0, 1)$
(5) $Y = [-1, 1) \setminus \{0\}$
(6) $Y = [0, \infty)$
(7) $Y = \{0\}$
(8) $Y = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

1.6. Produkt von metrischen Räumen. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) ein Paar metrischer Räume. Zur Erinnerung: Die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$ wird durch $X \times Y$ bezeichnet. Betrachten Sie die folgenden Funktionen $X \times Y \to [0, \infty)$:

$$\begin{aligned} d_1((x,y),(x',y')) &:= \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\} \\ d_2((x,y),(x',y')) &:= d_X(x,x') + d_Y(y,y') \\ d_3((x,y),(x',y')) &:= \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass sie alle gültige Abstandsfunktionen auf $X \times Y$ sind.
2. Zeigen Sie, dass sie alle äquivalent sind, d.h., es gibt eine Zahl $C > 0$, so dass

$$\begin{aligned} d_1((x,y),(x',y')) &\leq C d_2((x,y),(x',y')) \\ &\leq C^2 d_3((x,y),(x',y')) \leq C^3 d_1((x,y),(x',y')), \end{aligned}$$

   für alle $x, x' \in X, y, y' \in Y$.
3. Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n, y_n) \to (x, y)$ bezüglich $(X \times Y, d_3)$ genau dann, wenn $x_n \to x$ bezüglich d_X und $y_n \to y$ bezüglich d_Y.

Hinweise:

2.1.3 Ignoriere, was in der zweiten Variablen passiert, sie soll dich nur ablenken.

2.1.4 Ignoriere, was in der zweiten Variablen passiert, sie soll dich nur ablenken.

2.1.5 Schreibe für eine allgemeine Matrix $A := X - Y$ um, was der Ausdruck $\mathrm{Tr}\{A^T A\}^{1/2}$ eigentlich bedeutet, es sollte dir bekannt vorkommen...

2.1.6 Sieh, was passiert, wenn $(X - Y)$ antisymmetrisch ist...

2.1.7 Überzeuge dich zuerst, dass das "inf" tatsächlich ein "min" ist...

2.2.b Vergleiche mit 2.1.3...

2.2.d Spiele mit einer Menge von drei Punkten (einem Dreieck)...

2.4 Überzeuge dich zuerst mit einer Zeichnung, dass der Name dieser Funktion angemessen ist. Verwende dann die Charakterisierung von offenen/abgeschlossenen Mengen mit Folgen...

2.6 Lass dich nicht von der abstrakten Struktur ablenken, du kennst bereits all diese Dinge für $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, starte von dort aus und schreibe dann diese Argumente in diesem allgemeinen Rahmen um.