1.1. Beispiele und Nicht-Beispiele von metrischen Räumen.

Welche der folgenden Paare sind metrische Räume? Beweisen Sie es oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. $(B(X), d)$, wobei $B(X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen von einer nichtleeren Menge X nach $\mathbb{R}$ ist und
$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$
2. $(\mathbb{Q}_+, d)$, wobei $\mathbb{Q}_+$ die positiven rationalen Zahlen sind und $d(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.
3. $(\mathbb{R}^2, d)$, wobei $d(x, y) := (x_1 - y_1)^2 + |x_2 - y_2|$.
4. $(\mathbb{R}^2, d)$, wobei $d(x, y) := |x_1 - y_1|^{1/2} + |x_2 - y_2|$.
5. $(\mathbb{R}^{n\times n}, d)$ mit $d(X, Y) := \Big(\mathrm{Tr}\{(X - Y)^T (X - Y)\}\Big)^{1/2}$.
6. $(\mathbb{R}^{n\times n}, d)$ mit
$$d(X, Y) := \sup\{|v^T (X - Y)v| : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1\},$$
und $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der quadratischen Matrizen bezeichnet.
7. $(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, d)$, wobei der flache 2-dimensionale Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ die Menge der Äquivalenzklassen von Paaren von reellen Zahlen unter der Äquivalenzrelation
$$x, y \in \mathbb{R}^2, x \sim y \Leftrightarrow x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}, x_2 - y_2 \in \mathbb{Z},$$
ist und $d([x], [y]) := \inf_{k,h\in\mathbb{Z}} \|x - y + (k, h)\|$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Entfernung bezeichnet und $[x] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ die Äquivalenzklasse von $x \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet.

1.2. Multiple choice. Nehmen Sie eine Menge X und zwei Abstände d_1, d_2, sodass Sie wissen, dass (X, d_1) und (X, d_2) beide metrische Räume sind. Wählen Sie alle Aussagen unten aus, die zwangsläufig wahr sind.

(a) $(X, d_1 + 4d_2)$ ist ein metrischer Raum.

(b) $(X, d_1 \cdot d_2)$ ist ein metrischer Raum.

(c) $(X, \max\{d_1, d_2\})$ ist ein metrischer Raum.

(d) $(X, \min\{d_1, d_2\})$ ist ein metrischer Raum.

1.3. Multiple choice. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y_1, Y_2 \subset X$ Teilmengen. Wählen Sie alle Aussagen unten aus, die notwendigerweise wahr sind.

(a) $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$

(b) $\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} \subset \overline{Y_1 \cap Y_2}$

(c) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subset \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

(d) $\overline{Y_1 \cap Y_2} = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

1.4. Multiple choice. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge. Wir definieren die Funktion "Abstand von A" als

$$d(\cdot, A) : X \to [0, \infty), \quad d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Wählen Sie alle untenstehenden Aussagen aus, die notwendigerweise wahr sind.

(a) If A is closed and $x \in A^c$, then $d(x, A) > 0$.

(b) The set $M := \{x \in X : d(x, A) \geq 1\}$ is closed in X.

(c) For $x, y \in X$, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ holds.

(d) If A° is non-empty and $x \in X$, then $d(x, A) = d(x, A^\circ)$.

1.5. Grenze, Inneres etc. Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand der folgenden Teilmengen Y von $\mathbb{R}$ für die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Es ist nicht erforderlich, die Antwort zu rechtfertigen.

(1) $Y = [0, 1]$ | (2) $Y = \mathbb{Q}$
(3) $Y = \emptyset$ | (4) $Y = (0, 1)$
(5) $Y = [-1, 1) \setminus \{0\}$ | (6) $Y = [0, \infty)$
(7) $Y = \{0\}$ | (8) $Y = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

1.6. Produkt von metrischen Räumen. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) ein Paar metrischer Räume. Zur Erinnerung: Die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$ wird durch $X \times Y$ bezeichnet. Betrachten Sie die folgenden Funktionen $X \times Y \to [0, \infty)$:

$$\begin{aligned} d_1((x, y), (x', y')) &:= \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\} \\ d_2((x, y), (x', y')) &:= d_X(x, x') + d_Y(y, y') \\ d_3((x, y), (x', y')) &:= \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass sie alle gültige Abstandsfunktionen auf $X \times Y$ sind.
2. Zeigen Sie, dass sie alle äquivalent sind, d.h., es gibt eine Zahl $C > 0$, so dass

$$\begin{aligned} d_1((x, y), (x', y')) &\leq C d_2((x, y), (x', y')) \\ &\leq C^2 d_3((x, y), (x', y')) \leq C^3 d_1((x, y), (x', y')), \end{aligned}$$

   für alle $x, x' \in X, y, y' \in Y$.
3. Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n, y_n) \to (x, y)$ bezüglich $(X \times Y, d_3)$ genau dann, wenn $x_n \to x$ bezüglich d_X und $y_n \to y$ bezüglich d_Y.

Hinweise:

2.1.3 Ignoriere, was in der zweiten Variablen passiert, sie soll dich nur ablenken.

2.1.4 Ignoriere, was in der zweiten Variablen passiert, sie soll dich nur ablenken.

2.1.5 Schreibe für eine allgemeine Matrix $A := X - Y$ um, was der Ausdruck $\mathrm{Tr}\{A^T A\}^{1/2}$ eigentlich bedeutet, es sollte dir bekannt vorkommen...

2.1.6 Sieh, was passiert, wenn $(X - Y)$ antisymmetrisch ist...

2.1.7 Überzeuge dich zuerst, dass das "inf" tatsächlich ein "min" ist...

2.2.b Vergleiche mit 2.1.3...

2.2.d Spiele mit einer Menge von drei Punkten (einem Dreieck)...

2.4 Überzeuge dich zuerst mit einer Zeichnung, dass der Name dieser Funktion angemessen ist. Verwende dann die Charakterisierung von offenen/abgeschlossenen Mengen mit Folgen...

2.6 Lass dich nicht von der abstrakten Struktur ablenken, du kennst bereits all diese Dinge für $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, starte von dort aus und schreibe dann diese Argumente in diesem allgemeinen Rahmen um.

1. Solutions

Solution of 1.1:

1. Dies ist ein metrischer Raum, hier ist die gründliche Überprüfung:

   $\boldsymbol{d < \infty}$**.** Für beliebige $f, g \in B(X)$ ist $d(f, g)$ das Supremum einer Menge von reellen Zahlen (die Menge aller Werte $|f(x) - g(x)|$ wenn x über X variiert), und da die Menge beschränkt ist (da f und g beschränkte Funktionen sind), ist $d(f, g)$ endlich.

   Definitheit: Nach Definition ist $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \geq 0$, und $d(f, g) = 0$ genau dann, wenn $|f(x) - g(x)| = 0$ für alle $x \in X$, was $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ impliziert, d.h. $f = g$.

   Symmetrie: Für beliebige $f, g \in B(X)$ haben wir $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f)$.

   Dreiecksungleichung: Seien $f, g, h \in B(X)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} |g(x) - h(x)| = d(f,g) + d(g,h). \end{aligned}$$

2. Dies ist ein metrischer Raum, hier ist die gründliche Überprüfung:

   Definitheit: Nach Definition ist $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \geq 0$, und $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, was $x = y$ impliziert.

   Symmetrie: Für beliebige $x, y \in \mathbb{Q}_+$ haben wir $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = d(y,x)$.

   Dreiecksungleichung: Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x,z) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

3. Dies ist kein metrischer Raum, da die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist. Ein Gegenbeispiel ist:

$$d((0,0),(1,0)) + d((-1,0),(0,0)) = 2, \quad d((1,0),(-1,0)) = 2^2 = 4.$$

4. Dies ist ein metrischer Raum. Definitheit und Symmetrie sind sofort zu überprüfen. Beachten Sie, dass für $a, b \geq 0$ gilt $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, daher für $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq |x_1 - z_1 + z_1 - y_1|^{1/2} + |x_2 - z_1 + z_1 - y_2| \\ &\leq \Big(|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|\Big)^{1/2} + |x_2 - z_1| + |z_1 - y_2| \\ &\leq |x_1 - z_1|^{1/2} + |z_1 - y_1|^{1/2} + |x_2 - z_1| + |z_1 - y_2| = d(x,z) + d(y,z). \end{aligned}$$

5. Dies ist ein metrischer Raum. Tatsächlich handelt es sich um $\mathbb{R}^m$ mit seiner Standardentfernung in Verkleidung und $m = n \times n$. Entwirren wir die Definitionen:

$$\mathrm{Spur}\{A^T A\} = \sum_{i=1}^n (A^T A)_{ii} = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^n A^T_{ik} A_{ki})_{ii} = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^n A_{ki} A_{ki})_{ii} = \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^2.$$

   Daher, wenn wir X, Y als Vektoren in $\mathbb{R}^m$ mit $m = n \times n$ betrachten, finden wir

$$d(X,Y) = \Big(\mathrm{Spur}\{(X-Y)^T(X-Y)\}\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{i,k=1}^n (X-Y)_{ik}^2\Big)^{1/2} = \|X - Y\|.$$

6. Dies ist kein metrischer Raum, da $d(0,X)$ für $X \neq 0$ null sein kann. Betrachten Sie einfach jede antisymmetrische Matrix X und ein beliebiges $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |v^T X v| &= \Big|\sum_{i,j=1}^n v_i v_j X_{ij}\Big| = \tfrac{1}{2}\Big|\sum_{i,j=1}^n v_i v_j X_{ij} + \sum_{p,q=1}^n v_p v_q X_{pq}\Big| \\ &= \tfrac{1}{2}\Big|\sum_{i,j=1}^n v_i v_j X_{ij} - \sum_{p,q=1}^n v_q v_p X_{qp}\Big| = \tfrac{1}{2}\Big|\sum_{i,j=1}^n v_i v_j X_{ij} - \sum_{i,j=1}^n v_i v_j X_{ij}\Big| = 0. \end{aligned}$$

   Daher $d(X,0) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} |v^T X v| = 0$.

7. Dies ist ein metrischer Raum. Zunächst stellen wir fest, dass für jedes $x, y \in \mathbb{R}^2$ $(\bar{k}, \bar{h}) in \mathbb{Z}^2$ existieren, sodass

$$\inf_{(k,h)\in\mathbb{Z}^2} \|x - y - (k, h)\| = \|x - y - (\bar{k}, \bar{h})\|,$$

anders ausgedrückt ist das “inf” ein “min”. Um dies zu beweisen, beachten wir, dass $\inf_{(k,h)\in\mathbb{Z}^2} \|x - y - (k, h)\| \leq \|x - y\| := L$ und dass jedes Paar von ganzen Zahlen außerhalb des Bereichs $Q_L := [-100L, 100L] \times [-100L, 100L]$ ein wesentlich größeres Ergebnis liefern wird. Daher sind die besten ganzen Zahlen unter den endlich vielen innerhalb von Q_L zu finden.

Dies beweist, dass wenn $0 = d([x], [y]) = \inf_{(k,h)\in\mathbb{Z}^2} \|x - y - (k, h)\| = 0$, dann $x - y = (\bar{k}, \bar{h}) \in \mathbb{Z}^2$, was bedeutet, dass $[x] = [y]$ (d.h., $x \sim y$). Umgekehrt, wenn $[x] = [y]$, dann gibt es nach Definition ein Paar ganzer Zahlen $\bar{k}, \bar{h}$, sodass $x - y = (\bar{k}, \bar{h})$, was zeigt, dass

$$d([x], [y]) = \inf_{(k,h)\in\mathbb{Z}^2} \|x - y - (k, h)\| \leq \|x - y - (\bar{k}, \bar{h})\| = 0.$$

Wir überprüfen die Symmetrie:

$$\inf_{(k,h)\in\mathbb{Z}^2} \|x - y - (k, h)\| = \inf_{(k,h)\in\mathbb{Z}^2} \|y - x + (k, h)\| = \inf_{(k',h')\in\mathbb{Z}^2} \|y - x - (k', h')\|.$$

Schließlich überprüfen wir die Dreiecksungleichung. Hier haben wir eine etwas fortgeschrittenere Version des Tricks “Addieren und Subtrahieren der gleichen Menge”. Für $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und $h, h', k, k' \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$\begin{aligned} d([x], [y]) &\leq \|x - y - (k + k', h + h')\| = \|x - z + z - y - (k, h) + (k', h')\| \\ &\leq \|x - z - (k, h)\| + \|z - y - (k', h')\|. \end{aligned}$$

Nun ist die Wahl von k, k', h, h' vollständig frei, sodass wir (k, h) wählen können, um $d([x], [z])$ zu realisieren, und (k', h'), um $d([z], [y])$ zu realisieren.

Solution of 1.2:

(a) Wahr. Definitheit und Symmetrie sind einfach. Gegeben $x, y, z \in X$ hat man

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &\leq d_1(x, z) + d_1(z, y) \\ d_2(x, y) &\leq d_2(x, z) + d_2(z, y) \end{aligned}$$

und somit nach Summation

$$d_1(x, y) + 4d_2(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y) + 4d_2(x, z) + 4d_2(z, y).$$

(b) Falsch. Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}, d_1 = d_2 = |x - y|$. Vergleichen Sie mit 2.1.3.

(c) Wahr. Definitheit und Symmetrie sind einfach. Gegeben $x, y, z \in X$ hat man

$$d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y) \leq \max\{d_1(x,z), d_2(x,z)\} + \max\{d_1(z,y), d_2(z,y)\},$$
$$d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y) \leq \max\{d_1(x,z), d_2(x,z)\} + \max\{d_1(z,y), d_2(z,y)\}.$$

Somit gilt dieselbe obere Schranke für $\max d_1(x,y), d_2(x,y)$.

(d) Falsch. Nehmen Sie $X = A, B, C$ und die Abstände

$$d_1(A,B) := 1, \quad d_1(B,C) := 1, \quad d_1(C,A) := \tfrac{1}{100}$$

and

$$d_2(A,B) := 1, \quad d_2(B,C) := \tfrac{1}{2}, \quad d_2(C,A) := \tfrac{1}{2}.$$

Es ist klar, dass $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}$ nicht die Menge der Längen der Seiten eines Dreiecks sein kann.

Solution of 1.3:

(a) Wahr. Wenn x ein Häufungspunkt von $Y_1 \cup Y_2$ ist, bedeutet dies, dass es ein Häufungspunkt mindestens einer von ihnen ist.

(b) Falsch. In $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie wählen Sie $Y_1 := \mathbb{Q}$ und $Y_2 := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Diese beiden Mengen haben einen leeren Schnitt, aber sie sind beide dicht. Die rechte Seite ist also leer, aber die linke Seite ist $\mathbb{R}$.

(c) Wahr. Wenn x ein Häufungspunkt von Elementen ist, die sowohl zu Y_1 als auch zu Y_2 gehören, ist es insbesondere ein Häufungspunkt von Elementen von Y_1 und von Elementen von Y_2.

(d) Falsch, weil es implizieren würde, dass (b) gilt, und wir haben ein Gegenbeispiel dazu gegeben.

Solution of 1.4:

(a) True. If we had $d(x,A) = 0$ then there would be a sequence $\{a_k\} \subset A$ such that $d(x, a_k) \to 0$. This means that $a_k \to x$. On the other hand, since A is closed, this would imply $x \in A$ (cf. Lemma 9.46), which contradicts $x \in A^c$.

(b) True. Notice that $d(x,A) \geq 1$ if and only if $d(x,a) \geq 1$ for all $a \in A$. This means that

$$M := \bigcap_{a \in A} \{x \in X : d(x,a) \geq 1\} = \bigcap_{a \in A} f_a^{-1}([1, \infty)),$$

where $f_a \colon x \mapsto d(x,a)$. But each of the f_a is continuous and $[1, \infty)$ is closed, so M is an intersection of closed sets, hence M is closed (cf. Proposition 9.41).

(c) True. Take any $a \in A$ and write the triangular inequality

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a),$$

and we conclude taking the infimum over $a \in A$.

(d) False. Take $\mathbb{R}$ with the standard distance and $A := \mathbb{Q} \cup [2,3]$ so that $A^\circ = (2,3)$. Then $d(0,A) = 0$ but $d(0,(2,3)) = 2$.

Solution of 1.5:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & Y^\circ = (0,1), & \overline{Y} = [0,1], & \partial Y = \{0,1\}, \\
(2) & Y^\circ = \emptyset, & \overline{Y} = \mathbb{R}, & \partial Y = \mathbb{R}, \\
(3) & Y^\circ = \emptyset, & \overline{Y} = \emptyset, & \partial Y = \emptyset, \\
(4) & Y^\circ = (0,1), & \overline{Y} = [0,1], & \partial Y = \{0,1\}, \\
(5) & Y^\circ = (-1,0) \cup (0,1), & \overline{Y} = [-1,1], & \partial Y = \{-1,0,1\}, \\
(6) & Y^\circ = (0,\infty), & \overline{Y} = [0,\infty), & \partial Y = \{0\}, \\
(7) & Y^\circ = \emptyset, & \overline{Y} = \{0\}, & \partial Y = \{0\}, \\
(8) & Y^\circ = \emptyset, & \overline{Y} = Y \cup \{0\}, & \partial Y = \overline{Y}.
\end{array}
$$

Solution of 1.6:

1. Symmetrie und Definitheit sind einfach zu überprüfen, daher konzentrieren wir uns auf die Dreiecksungleichung. Bevor wir uns auf lange Zeichenketten begeben, betrachten wir die drei Funktionen, die wir verwenden:

$$\max\{a,b\}, \quad a+b, \quad \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \text{für } a,b \geq 0.$$

Nennen wir $F(a,b)$ eine beliebige dieser Funktionen, so dass

$$d_i((x,y),(x',y')) = F(d_X(x,x'), d_Y(y,y')).$$

Erstens ist F separat in jedem seiner Argumente zunehmend. Zweitens hat F eine subadditive Eigenschaft:

$$F(a+a', b+b') \leq F(a,b) + F(a',b'),$$

das heißt, wir haben:

$$
\begin{aligned}
\max\{a+a', b+b'\} &\leq \max\{a,b\} + \max\{a',b'\}, \\
(a+a') + (b+b') &\leq (a+b) + (a'+b'), \\
\sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2} &\leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a'^2+b'^2}.
\end{aligned}
$$

Die Überprüfung dieser Ungleichungen ist der Kern dieser Übung. Die zweite ist offensichtlich und die dritte ist die Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^2$, die im Unterricht bewiesen wurde (vgl. Proposition 9.2). Wir beweisen die erste: durch Addition der beiden Ungleichungen

$$a \leq \max\{a,b\}, \quad a' \leq \max\{a',b'\},$$

finden wir $a+a' \leq \max\{a,b\}+\max\{a',b'\}$. Durch Addition der beiden Ungleichungen

$$b \leq \max\{a,b\}, \quad b' \leq \max\{a',b'\},$$

finden wir $b + b' \le \max\{a, b\} + \max\{a', b'\}$, und so

$$\max\{a + a', b + b'\} \le \max\{a, b\} + \max\{a', b'\}.$$

Nun sind wir bereit, die Dreiecksungleichung im Produktraum zu beweisen. Wenn wir die Dreiecksungleichung für X und Y schreiben, haben wir

$$\begin{aligned} d_X(x, x'') &\le \underbrace{d_X(x, x')}_{=:a} + \underbrace{d_X(x', x'')}_{=:a'} = a + a', \\ d_Y(y, y'') &\le \underbrace{d_Y(y, y')}_{=:b} + \underbrace{d_Y(y', y'')}_{=:b'} = b + b'. \end{aligned}$$

Also können wir schreiben

$$\begin{aligned} F(d_X(x, x''), d_Y(y, y'')) &\le F(d_X(x, x') + d_X(x', x''), d_Y(y, y') + d_Y(y', y'')) \\ &= F(a + a', b + b') \\ &\le F(a, b) + F(a', b') \\ &= F(d_X(x, x'), d_Y(y, y')) + F(d_X(x'', x'), d_Y(y'', y')). \end{aligned}$$

2. Wir beobachten nur, dass für alle $a, b \ge 0$ gilt

$$\max\{a, b\} \le a + b \le 2\sqrt{a^2 + b^2} \le 2\sqrt{2\max\{a^2, b^2\}} = 2\sqrt{2}\max\{a, b\}. \tag{1}$$

3. Wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$, bedeutet das, dass

$$a_n := d_X(x_n, x) \to 0 \text{ und } b_n := d_Y(y_n, y) \to 0.$$

Daher finden wir durch (1), dass

$$\max\{a_n, b_n\} \to 0, \quad a_n + b_n \to 0 \text{ und } \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \to 0,$$

was bedeutet, dass $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$ bezüglich aller Abstände d_i.

Umgekehrt, wenn mindestens eine der Folgen

$$\max\{a_n, b_n\}, \quad a_n + b_n, \text{ und } \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

infinitesimal ist, dann sind auch $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ infinitesimal.