Einige dieser Aufgaben haben ein geschlossenes Antwortformat, ähnlich dem, das Sie in der Abschlussprüfung finden könnten.

Die mit (*) gekennzeichneten Fragen sind etwas komplexer, so dass Sie sie vielleicht beim ersten Lesen übergehen sollten. Hinweise finden Sie auf der nächsten Seite.

3.1. BONUS PROBLEM. Geben Sie ein Beispiel für:

(a) Eine $\frac{1}{2}$-Lipschitz-Funktion $f\colon [0,1) \to [0,1)$, die keinen Fixpunkt hat.

(b) Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die keinen Fixpunkt hat, aber eine Isometrie ist, d.h.,

$$\|f(x) - f(x')\| = \|x - x'\| \text{ für alle } x, x' \in \mathbb{R}^2.$$

3.2. Stetigkeit des Abstands. Sei (X,d) ein metrischer Raum und versehe $X \times X$ mit dem Produktabstand $d_2(x,y) := d(x_1,y_1)+d(x_2,y_2)$. Zeigen Sie, dass die Abstandsfunktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ bezüglich d_1 stetig ist und genauer gesagt, dass sie 1-Lipschitz ist. Ist d auch stetig bezüglich des Abstands

$$d_1(x,y) := \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\}?$$

Ist d auch Lipschitz-stetig bezüglich des Abstands

$$d_3(x,y) := \sqrt{d(x_1,y_1)^2 + d(x_2,y_2)^2}?$$

3.3. Stetigkeit der Komposition. Seien X, Y, Z metrische Räume und seien $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass $g \circ f\colon X \to Z$ stetig ist, indem Sie mindestens zwei der drei in der Vorlesung behandelten äquivalenten Definitionen der Stetigkeit verwenden.

3.4. Probleme am Ursprung. Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ ist. Andererseits zeigen Sie, dass es genau eine stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $g(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ ist.

3.5. Heine-Cantor. Seien X, Y metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass wenn X kompakt ist, dann ist f gleichmäßig stetig.

3.6. Offen, abgeschlossen, vollständig und kompakt. Für jede der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ sagen Sie, ob sie offen/abgeschlossen/keins/kompakt sind (im Hinblick auf die standardmäßige euklidische Struktur). Versuchen Sie, Ihre Behauptungen "effizient" zu beweisen.

1. $E_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_2 \leq 2\}$

2. $E_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : \sin(\|x\|) \geq \frac{1}{4}\}$
3. $E_3 := \bigcup_{n\geq 1}\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^4 - \frac{1}{n}x_3^2 - x_2^2 > \frac{1}{n}, x_1 + x_2 < 6\}$
4. $E_4 := \{(x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) : x \cdot y > \frac{1}{2}\|x\|\|y\|\}$
5. $E_5 := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} :$ die Matrix X ist invertierbar$\}$
6. $E_6 := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} :$ die Matrix X ist symmetrisch$\}$
7. $E_7 := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} :$ die Einträge der Matrix X sind entweder 0 oder 1$\}$
8. $E_8 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 6,$ für alle $1 \leq i \leq n\}$
9. $E_9 := E_8 \times E_3 \subset \mathbb{R}^{n+3}$
10. $E_{10} := E_2 \cap E_8 \subset \mathbb{R}^n$

3.7. Mehrfachauswahl. Wählen Sie alle unten stehenden Aussagen aus, die wahr sind.

(a) Eine nichtleere offene strenge Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ kann nicht kompakt sein.

(b) Eine nichtleere offene strenge Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ kann nicht vollständig sein.

(c) Eine vollständige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ enthält alle ihre Häufungspunkte.

(d) Eine abzählbare Vereinigung von vollständigen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

3.8. Mehrfachauswahl. Wählen Sie alle unten stehenden Aussagen aus, die wahr sind.

(a) Wenn Sie eine Karte von Zürich auf Ihren Schreibtisch ausbreiten, wird ein Punkt des Schreibtisches mit seiner Darstellung auf der Karte übereinstimmen (in einer idealen Welt).

(b) Wenn $f\colon [0,1] \to [0,2]$ $\frac{1}{2}$-Lipschitz ist, dann hat f einen Fixpunkt.

(c) Wenn $f\colon [0,2] \to [0,1]$ $\frac{1}{2}$-Lipschitz ist, dann hat f einen Fixpunkt.

(d) Wenn $f\colon [0,1] \cup [2,3] \to [0,1] \cup [2,3]$ stetig differenzierbar ist und $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [0,1] \cup [2,3]$, dann hat sie einen Fixpunkt.

(e) (*) Wenn $f\colon [0,1] \to [0,1]$ differenzierbar ist und $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in (0,1)$, dann hat sie einen Fixpunkt.

3.9. Multiple choice. Wählen Sie alle Aussagen unten aus, die wahr sind.

(a) Die Funktion $(x, y) \mapsto x + y$ ist gleichmäßig stetig in $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Funktion $(x, y) \mapsto xy$ ist gleichmäßig stetig in $\mathbb{R}^2$.

(c) Die Funktion $(x, y) \mapsto x + y$ ist gleichmäßig stetig in $[0,1]^2$.

(d) Die Funktion $(x, y) \mapsto xy$ ist gleichmäßig stetig in $[0,1]^2$.

Hinweise:

3.2 Vergleichen Sie mit Problem 2.6...

3.4 Wenn eine Funktion an 0 stetig ist und $x_k \to 0$ und $y_k \to 0$, dann müssen $f(x_k)$ und $f(y_k)$ gegen den gleichen Wert konvergieren...

3.5 Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x \in X$ gibt es ein $\delta_x > 0$, sodass $f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \epsilon)$... Betrachten Sie jetzt die Kollektion $\{B(x, \delta_x)\}_{x \in X}$... Welche Definition von Kompaktheit scheint am nützlichsten?