Einige dieser Aufgaben haben ein geschlossenes Antwortformat, ähnlich dem, das Sie in der Abschlussprüfung finden könnten.

Die mit (*) gekennzeichneten Fragen sind etwas komplexer, so dass Sie sie vielleicht beim ersten Lesen übergehen sollten. Hinweise finden Sie auf der nächsten Seite.

3.1. BONUS PROBLEM. Geben Sie ein Beispiel für:

(a) Eine $\frac{1}{2}$-Lipschitz-Funktion $f\colon [0,1) \to [0,1)$, die keinen Fixpunkt hat.

(b) Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die keinen Fixpunkt hat, aber eine Isometrie ist, d.h.,

$$\|f(x) - f(x')\| = \|x - x'\| \text{ für alle } x, x' \in \mathbb{R}^2.$$

3.2. Stetigkeit des Abstands. Sei (X,d) ein metrischer Raum und versehe $X \times X$ mit dem Produktabstand $d_2(x,y) := d(x_1,y_1)+d(x_2,y_2)$. Zeigen Sie, dass die Abstandsfunktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ bezüglich d_1 stetig ist und genauer gesagt, dass sie 1-Lipschitz ist. Ist d auch stetig bezüglich des Abstands

$$d_1(x,y) := \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\}?$$

Ist d auch Lipschitz-stetig bezüglich des Abstands

$$d_3(x,y) := \sqrt{d(x_1,y_1)^2 + d(x_2,y_2)^2}?$$

3.3. Stetigkeit der Komposition. Seien X, Y, Z metrische Räume und seien $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass $g \circ f\colon X \to Z$ stetig ist, indem Sie mindestens zwei der drei in der Vorlesung behandelten äquivalenten Definitionen der Stetigkeit verwenden.

3.4. Probleme am Ursprung. Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ ist. Andererseits zeigen Sie, dass es genau eine stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $g(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ ist.

3.5. Heine-Cantor. Seien X, Y metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass wenn X kompakt ist, dann ist f gleichmäßig stetig.

3.6. Offen, abgeschlossen, vollständig und kompakt. Für jede der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ sagen Sie, ob sie offen/abgeschlossen/keins/kompakt sind (im Hinblick auf die standardmäßige euklidische Struktur). Versuchen Sie, Ihre Behauptungen "effizient" zu beweisen.

1. $E_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_2 \leq 2\}$

2. $E_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : \sin(\|x\|) \geq \frac{1}{4}\}$
3. $E_3 := \bigcup_{n\geq 1}\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^4 - \frac{1}{n}x_3^2 - x_2^2 > \frac{1}{n}, x_1 + x_2 < 6\}$
4. $E_4 := \{(x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) : x \cdot y > \frac{1}{2}\|x\|\|y\|\}$
5. $E_5 := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} :$ die Matrix X ist invertierbar$\}$
6. $E_6 := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} :$ die Matrix X ist symmetrisch$\}$
7. $E_7 := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} :$ die Einträge der Matrix X sind entweder 0 oder 1$\}$
8. $E_8 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 6,$ für alle $1 \leq i \leq n\}$
9. $E_9 := E_8 \times E_3 \subset \mathbb{R}^{n+3}$
10. $E_{10} := E_2 \cap E_8 \subset \mathbb{R}^n$

3.7. Mehrfachauswahl. Wählen Sie alle unten stehenden Aussagen aus, die wahr sind.

(a) Eine nichtleere offene strenge Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ kann nicht kompakt sein.

(b) Eine nichtleere offene strenge Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ kann nicht vollständig sein.

(c) Eine vollständige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ enthält alle ihre Häufungspunkte.

(d) Eine abzählbare Vereinigung von vollständigen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

3.8. Mehrfachauswahl. Wählen Sie alle unten stehenden Aussagen aus, die wahr sind.

(a) Wenn Sie eine Karte von Zürich auf Ihren Schreibtisch ausbreiten, wird ein Punkt des Schreibtisches mit seiner Darstellung auf der Karte übereinstimmen (in einer idealen Welt).

(b) Wenn $f : [0, 1] \to [0, 2]$ $\frac{1}{2}$-Lipschitz ist, dann hat f einen Fixpunkt.

(c) Wenn $f : [0, 2] \to [0, 1]$ $\frac{1}{2}$-Lipschitz ist, dann hat f einen Fixpunkt.

(d) Wenn $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to [0, 1] \cup [2, 3]$ stetig differenzierbar ist und $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [0, 1] \cup [2, 3]$, dann hat sie einen Fixpunkt.

(e) (*) Wenn $f : [0, 1] \to [0, 1]$ differenzierbar ist und $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in (0, 1)$, dann hat sie einen Fixpunkt.

3.9. Multiple choice. Wählen Sie alle Aussagen unten aus, die wahr sind.

(a) Die Funktion $(x, y) \mapsto x + y$ ist gleichmäßig stetig in $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Funktion $(x, y) \mapsto xy$ ist gleichmäßig stetig in $\mathbb{R}^2$.

(c) Die Funktion $(x, y) \mapsto x + y$ ist gleichmäßig stetig in $[0, 1]^2$.

(d) Die Funktion $(x, y) \mapsto xy$ ist gleichmäßig stetig in $[0, 1]^2$.

Hinweise:

3.2 Vergleichen Sie mit Problem 2.6...

3.4 Wenn eine Funktion an 0 stetig ist und $x_k \to 0$ und $y_k \to 0$, dann müssen $f(x_k)$ und $f(y_k)$ gegen den gleichen Wert konvergieren...

3.5 Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x \in X$ gibt es ein $\delta_x > 0$, sodass $f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \epsilon)$... Betrachten Sie jetzt die Kollektion $\{B(x, \delta_x)\}_{x \in X}$... Welche Definition von Kompaktheit scheint am nützlichsten?

3. Solutions

Solution of 3.1: (a) $f(x) := \frac{1+x}{2}$. (b) $f(x,y) := (x+1, y)$.

Solution of 3.2: Erinnern Sie sich daran, dass die Dreiecksungleichung für d impliziert

$$|d(x,y) - d(x',y)| \leq d(x,x') \text{ für alle } x, x', y \in X.$$

Also haben wir für alle $x, x', y, y' \in X$ dass

$$\begin{aligned} |d(x,x') - d(y,y')| &= |d(x,x') - d(x,y') + d(x,y') - d(y,y')| \\ &\leq |d(x,x') - d(x,y')| + |d(x,y') - d(y,y')| \\ &\leq d(x',y') + d(x,y) =: d_2((x,x'),(y,y')), \end{aligned}$$

was bedeutet, dass d bezüglich d_2 1-Lipschitz ist. Insbesondere ist es stetig.

Die Antwort auf beide Fragen lautet ja. Wir haben in Problemset 2.6 gesehen, dass d_1, d_2, d_3 alles vergleichbare Abstände auf dem Produkt $X \times X$ sind. Also ist jede Funktion, die bezüglich eines von ihnen (Lipschitz) stetig ist, auch bezüglich der anderen (möglicherweise mit einer größeren Lipschitzkonstanten) (Lipschitz) stetig.

Solution of 3.3: Topologisch. Lassen Sie U eine offene Menge in Z sein, dann ist $g^{-1}(U)$ offen in Y, da g topologisch stetig ist. Dann ist auch $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ offen in X, weil auch f topologisch stetig ist. Somit haben wir gezeigt, dass für alle offenen Mengen $U \subset Z$ auch $(g \circ f)^{-1}(U)$ offen ist. Dies bedeutet, dass $g \circ f : X \to Z$ topologisch stetig ist.

Sequentiell. Sei (x_n) eine Folge in X, die gegen ein $x \in X$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $(g \circ f)(x_n)$ gegen $(g \circ f)(x)$ in Z konvergiert.

Da f stetig ist, konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x)$ in Y. Ebenso, da g stetig ist, konvergiert $g(f(x_n))$ gegen $g(f(x))$ in Z. Daher ist $g \circ f : X \to Z$ sequentiell stetig.

Solution of 3.4: Angenommen, eine solche stetige Funktion f existiert, dann muss sie sequenziell stetig sein. Zeigen wir, dass dies nie der Fall ist, indem wir zwei Folgen auswählen, die gegen den Ursprung konvergieren, entlang derer f vollständig verschiedene Werte annimmt. Wählen Sie eine beliebige Folge $t_k \downarrow 0$, dann:

$$(t_k, t_k) \to (0,0) \text{ und } (t_k, -t_k) \to (0,0), \text{ aber } \lim_k f(t_k, t_k) = \tfrac{1}{2} \neq -\tfrac{1}{2} = \lim_k f(t_k, -t_k).$$

Zunächst zeigen wir, dass, falls solch ein g existiert, es zwangsläufig gegeben ist durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } x = y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Tatsächlich ist $\lim_k g(1/k, 1/k) = \lim_k 1/k = 0$, daher kann dies der einzige Wert sein, den g am Ursprung annimmt.

Überprüfen wir nun, dass das durch (1) definierte g tatsächlich stetig am Ursprung ist (Stetigkeit an den Punkten außerhalb des Ursprungs ist offensichtlich). Nehmen Sie beliebige nicht-nulle Folgen $x_k, y_k \to 0$, dann

$$|g(x_k, y_k)| = \frac{|x_k y_k|}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \leq \frac{x_k^2 + y_k^2}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \leq \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \to 0.$$

Solution of 3.5: Siehe Proposition 9.77 in den Skript.

Solution of 3.6:

1. Nicht offen, da $(0, 2 + \epsilon^2, 0)$ außerhalb von E_1 liegt, aber $(0, 2 - \epsilon^2, 0)$ innerhalb von E_1 liegt. Nicht abgeschlossen, da $(0, \epsilon^2, 0)$ innerhalb von E_1 liegt, aber der Grenzwert für $\epsilon \to 0$ nicht: $(0, 0, 0, \notin E_1$. Sonst wäre es abgeschlossen.

2. Beachten Sie, dass $E_2 = f^{-1}([1/4, \infty))$ mit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin \|x\|$. Nun ist f stetig, $[1/4, \infty)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, also ist E_2 abgeschlossen. Andererseits ist $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend, daher kann E_2 auch nicht offen sein, da:

$$(\pi/2, 0, \ldots, 0) \in E_2, \quad (0, \ldots, 0) \notin E_2.$$

   Schließlich kann E_2 nicht kompakt sein, da es nicht beschränkt ist, da $x_k := (2k\pi + \pi/2, 0, \ldots, 0) \in E_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ liegt.

3. Definieren Sie die stetigen Funktionen $g, f_n \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f_n(x) := x_1^4 - \tfrac{1}{n} x_3^2 - x_2^2 - \tfrac{1}{n}, \quad g(x) := 6 - x_1 - x_2.$$

   Dann können wir schreiben:

$$E_3 := \bigcup_{n \geq 1} f_n^{-1}((-\infty, 0)) \cap g^{-1}((-\infty, 0)) = \Big\{ \bigcup_{n \geq 1} f_n^{-1}((-\infty, 0)) \Big\} \cap g^{-1}((-\infty, 0)),$$

   der Ausdruck in den geschweiften Klammern ist offen (Vereinigung von Offenen) und so ist auch E_3 (wir schneiden nur einmal mit einer anderen offenen Menge). Beachten Sie, dass $(1 + t, -t, 0) \in E_3$ für alle $t \geq 1$ liegt, also ist E_3 unbeschränkt und kann nicht kompakt sein (und es ist nicht leer). Andererseits liegt $(0, 6, 1) \notin E_3$, also kann ihr Komplement nicht leer sein, daher ist E_3 nicht abgeschlossen ($\mathbb{R}^n$ ist wieder zusammenhängend).

4. Ähnlich, offen unter Verwendung der stetigen Funktion:

$$(x, y) \mapsto x \cdot y - \|x\| \|y\|,$$

   unbeschränkt durch Homogenität $(x, y) \in E_4 \Leftrightarrow (tx, ty) \in E_4$. Nicht leer wie $(e_n, e_n) \in E_4$, nicht alles wie $(0, v) \notin E_4$.

5. Die Umkehrbarkeit kann als $E_5 = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ausgedrückt werden, da die Determinante eine Polynomfunktion der Einträge ist, ist sie stetig, also ist E_5 offen. Auch hier ist es durch Homogenität unbeschränkt und nicht alles (nicht alle Matrizen sind invertierbar).

6. $E_6 = f^{-1}(\{0\})$ mit $f(X) = \sum_{i,j} |X_{ij} - X_{ji}|^2$. Also ist E_6 abgeschlossen. Kann nicht offen sein (nicht alle Matrizen sind symmetrisch, es gibt mindestens eine symmetrische Matrix) noch kompakt (man kann symmetrische Matrizen mit beliebig großen Einträgen finden).

7. Dies ist eine endliche Menge von "Punkten" in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Daher ist sie kompakt, abgeschlossen und nicht offen.

8. $E_8 = f^{-1}(-\infty, 6])$ mit $f(x) = \max_{1\le i\le n} |x_i|$ daher ist es abgeschlossen. Es ist weder alles noch nichts, also ist es nicht offen. Darüber hinaus ist es kompakt, da es offensichtlich beschränkt ist:
$$x \in E_8 \Rightarrow \|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{n} 6^2 \le 100^n.$$

9. Da E_8 unbeschränkt ist, so ist E_9 ebenfalls unbeschränkt, daher kann es nicht kompakt sein. Da es das Produkt aus einer offenen und einer kompakten Menge ist, erwarten wir, dass es keines von beiden ist. Wenn es offen wäre, dann schreiben Sie es als Vereinigung offener Bälle $\{B(x_i, r_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^{n+3}$. Dann wären die Bälle
$$B' := B(x_i, r_i) \cap \{x_{n+1} = \ldots = x_{n+3}0\} \subset \mathbb{R}^3$$
offen und in E_8 enthalten, also wäre E_8 offen, Widerspruch.

   Wählen Sie eine Folge $\{x_k\} \subset E_3 \subset \mathbb{R}^n$, die gegen ein $z \in \mathbb{R}^n \setminus E_3$ konvergiert. Dann konvergiert die Folge $x'_k := (x_k, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^{n+3}$ gegen $(z, 0, 0, 0)$. Wenn E_9 abgeschlossen wäre, würden wir $(z, 0, 0, 0) \in E_3 \times E_8$ erhalten, also $z \in E_3$, Widerspruch.

10. Da es ein Schnitt einer abgeschlossenen und einer kompakten Menge ist, ist es kompakt und daher abgeschlossen. Es ist nicht leer, da $(\pi/2, 0, \ldots, 0 \in E_{10}$ liegt, also ist es nicht offen.

Solution of 3.7:

(a) Wahr. Sei U eine solche Menge, dann wählen Sie ein beliebiges $z \in \partial U$ und lassen Sie $f \in C(U)$ definiert sein durch $f(x) := \|x - z\|^{-1}$. Wenn U kompakt wäre, wäre f beschränkt, wir können eine Folge $x_k \in U$ wählen, so dass $x_k \to z$, also $f(x_k) \to \infty$, Widerspruch.

   Wir bemerken, dass ∂U nicht leer ist, da sonst $U = \overline{U}$ clopen wäre, aber es ist nicht leer und auch nicht das gesamte $\mathbb{R}^n$ nach Annahme.

(b) Wahr. Sei U eine solche Menge, wählen Sie $z \in \partial U$ und eine Folge $x_k \in U$ so dass $x_k \to z$. Während $\{x_k\}$ Cauchy ist (ist in $\mathbb{R}^n$ konvergent), gehört ihr Grenzwert nicht zu U.

(c) Wahr, es muss als Untermenge von $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen sein.

(d) Falsch. Eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist immer kompakt, also vollständig, aber $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, während es eine abzählbare Vereinigung von Punkten ist.

(f) Wahr. Eine Folge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn sie Cauchy ist, daher ist es für eine Menge gleichbedeutend, ob sie ihre Häufungspunkte oder die Grenzwerte ihrer Cauchy-Folgen enthält.

Solution of 3.8:

(a) Wahr, zumindest wenn Ihr Schreibtisch in Zürich steht. Die Karte (wörtlich) bildet Zürich auf ein Stück Papier ab, sodass Punkte, die in der Realität hunderte von Metern voneinander entfernt sind, auf der Karte nur wenige Millimeter voneinander entfernt sind. Die Lipschitz-Konstante beträgt ungefähr 1/10000. Außerdem steht Ihr Schreibtisch in Zürich, sodass die Abbildung die Definitionsmenge in sich selbst abbildet (wenn Sie aus Singapur am E-Learning teilnehmen, dann ist es falsch).

(b) Falsch, $f(x) := 1\frac{x}{10}$ ist ein Gegenbeispiel.

(c) Wahr, der Fixpunktsatz von Banach gilt, da $[0,1] \subset [0,2]$.

(d) Falsch, wählen Sie f, das $[0,1] \leftrightarrow [2,3]$ vertauscht und sie um einen Faktor von $1/10$ zusammenzieht. In Symbolen:

$$f(x) := 2 + \frac{x}{10} \text{ für alle } x \in [0,1], \quad f(x) := x - 2 + \frac{x}{10} \text{ für alle } x \in [2,3].$$

(e) Wahr. Nehmen Sie $\epsilon > 0$ und betrachten Sie $f_\epsilon(x) := (1-\epsilon)f(x)$. Beachten Sie, dass $f_\epsilon([0,1]) \subset [0, 1-\epsilon] \subset [0,1]$. Außerdem ist $|f_\epsilon'(x)| < 1 - \epsilon$, daher ist es nach dem Mittelwertsatz eine Kontraktion (das Intervall ist zusammenhängend). Also gibt der Fixpunktsatz von Banach ein $x_\epsilon \in [0,1]$, so dass

$$x_\epsilon = f_\epsilon(x_\epsilon) = (1-\epsilon)f(x_\epsilon).$$

Durch Kompaktheit gibt es $\epsilon_k \to 0$ und $x_0 \in [0,1]$, so dass $x_{\epsilon_k} \to x_0$, daher können wir diese Gleichung gegen den Grenzwert laufen lassen und feststellen, dass x_0 ein Fixpunkt ist.

Tatsächlich zeigt ein Argument mit Zusammenhang, dass jede stetige Funktion $g\colon [0,1] \to [0,1]$ einen Fixpunkt hat.

Solution of 3.9:

(a) Wahr, sie ist tatsächlich Lipschitz-stetig:

$$|(x+y) - (x'+y')| \leq |x - x'| + |y - y'| \leq 2\sqrt{|x-x'|^2 + |y-y'|^2},$$

wobei wir $a + b \leq 2\sqrt{a^2+b^2}$ verwendet haben.

(b) Falsch. Sei $f(x,y) := xy$. Betrachten Sie für ein festes $\delta > 0$ die Bälle $B_t := B((t,t),\delta)$ mit dem Zentrum bei (t,t). Die Größe des Intervalls $f(B_t)$ muss gegen Unendlich gehen, wenn $t \to \infty$, daher ist es unmöglich, dass es in $[-1+t^2, t^2+1] = B_1(f(t,t)) \subset \mathbb{R}$ enthalten bleibt, was die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit mit $\epsilon = 1$ verletzt.

Überprüfung: $f(t, t \pm \delta) = t^2 \pm 2t\delta + \delta^2$, daher ist $f(B_t) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (es ist zusammenhängend), das das Intervall $[t^2 - 2t\delta + \delta^2, t^2 + 2t\delta + \delta^2]$ enthält, dessen Länge gegen Unendlich geht, wenn $t \to \infty$ mit festem δ.

(c) Wahr aufgrund des Heine-Cantor-Theorems 3.5.

(d) Wahr aufgrund des Heine-Cantor-Theorems 3.5.