Fragen, die mit (*) markiert sind, sind etwas komplexer. Sie könnten sie beim ersten Lesen überspringen. Hinweise sind auf der nächsten Seite verfügbar.

4.1. BONUS PROBLEM. Betrachten Sie die Funktion $u\colon (x,y) \mapsto x^{\sin(y)}$, definiert für $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\partial_x u$ und $\partial_y u$.

4.2. Zusammenhängende Graphen. Lassen Sie $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend sein und lassen Sie $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ sein. Zeigen Sie, dass sein Graph

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist.

4.3. *p*-Normen. Für $p \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$ definieren Sie die $p-$Norm von x als

$$|x|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}.$$

1. Für $n = 2$ und $p = 1, 2, 10$ skizzieren Sie die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_p \leq 1\}$.
2. Für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}^n$ berechnen Sie den Grenzwert $|x|_\infty := \lim_{p\to\infty} |x|_p$.
3. Beweisen Sie unter Verwendung einer geeigneten Ungleichung, die Sie im Unterricht gesehen haben, dass

   $$\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{p-1} b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{p-2} b_i^2\Big),$$

   wann immer a_i, b_i n-Tupel positiver Zahlen sind.
4. Fixieren Sie $x, y \in \mathbb{R}^n$ und betrachten Sie die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert als

   $$f(t) := |tx + (1-t)y|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |tx_i + (1-t)y_i|^p\Big)^{1/p}. \tag{1}$$

   Zeigen Sie, dass f konvex ist. Sie können zuerst annehmen, dass die Koordinaten von x und y alle streng positiv sind und die Ungleichheit des vorherigen Punktes verwenden.
5. Folgern Sie aus dem vorherigen Punkt, dass die Dreiecksungleichung gilt, d.h.

   $$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

6. Was passiert für $p \in (0,1)$?

4.4. *p*-Mittel. Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit positiven Koordinaten und $p \neq 0$ definieren Sie das p-Mittel als

$$\mu_p(x) := \Big(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\Big)^{1/p}.$$

1. Berechnen Sie die Grenzwerte $p \to \pm\infty, p \to 0$ und definieren Sie entsprechend

$$\mu_{-\infty}(x), \quad \mu_0(x), \quad \mu_{+\infty}(x).$$

2. Zeigen Sie für jedes n-Tupel von Zahlen $a_i > 0$, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1 + \ldots + a_n} \log(a_i) \geq \log\Big(\frac{a_1 \ldots + a_n}{n}\Big).$$

3. Für ein festes x zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(t) := \mu_t(x)$, stetig und monoton steigend ist.

4. Beweisen Sie die arithmetisch-geometrische Ungleichung und die arithmetisch-quadratische Ungleichung:

$$n(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq x_1 + \ldots + x_n, \qquad (x_1 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

5. (*) Ist f im gesamten $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

4.5. Alle Normen sind äquivalent in $\mathbb{R}^n$. Sei $|\cdot|$ die Standard-Euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ und sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ eine andere Norm (eine Funktion, die die Eigenschaften von Definition 9.91 erfüllt).

1. Drücken Sie x in einer Basis aus und verwenden Sie die „abstrakten" Eigenschaften, die f haben muss, um zu zeigen, dass es eine Konstante $C_1 > 0$ gibt, so dass

$$f(x) \leq C_1|x| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Zeigen Sie, dass f in $\mathbb{R}^n$ stetig ist (in Bezug auf den Standardabstand von $\mathbb{R}^n$!).

3. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $c_2 > 0$ gibt, so dass

$$f(x) \geq c_2 \text{ für alle } |x| = 1.$$

4. Folgern Sie, dass $f(x) \geq c_2|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Zeigen Sie, dass wenn $\tilde{f}$ eine weitere Norm ist, dann gibt es $C > 0$, so dass

$$C^{-1} f(x) \leq \tilde{f}(x) \leq C f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

4.6. Hilbert-Schmidt-Norm der Komposition. Nehmen Sie zwei lineare Funktionen $\phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ und $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, und bezeichnen Sie mit Φ, Ψ die Matrizen, die sie in den kanonischen Basen repräsentieren. Erinnern Sie sich daran, dass die lineare Abbildung $\psi \circ \phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ in diesen Basen durch die Matrix $\Psi \cdot \Phi$ dargestellt wird. Zeigen Sie, dass

$$\|\Psi \cdot \Phi\| \leq \|\Psi\|\|\Phi\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Hilbert-Schmidt-Norm einer Matrix ist (siehe 10.1.3 in den Notizen).

4.7. Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ für $m > 1$. Ist es wahr, dass es ein $t \in [0,1]$ gibt, so dass

$$f(1) - f(0) = Df_t(1) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{bmatrix}?$$

Beweisen Sie es oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\nu \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

1. Wenn $\partial_1 u \equiv 0$ dann "u hängt nicht von x_1 ab", genauer: es existiert eine eindeutige Funktion $v \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ so dass

$$u(x_1, \dots, x_n) = v(x_2, \dots, x_n) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Wenn $\partial_\nu u \equiv 0$ und $\nu \cdot e_1 \neq 0$ dann "u ist eine Funktion von $n-1$ Variablen", genauer: es existiert eine eindeutige Funktion $w \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ so dass

$$u(x_1, \dots, x_n) = w(x_2 - \tfrac{x_1 \nu_2}{\nu_1}, \dots, x_n - \tfrac{x_1 \nu_n}{\nu_1}) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

3. (*) Was können wir folgern, wenn wir nur annehmen, dass $\partial_1 u = 0$ in einer offenen, zusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$?

Hinweise:

4.3.3 Verwenden Sie Cauchy–Schwartz und die Tatsache, dass $a_i^{p-1}b_i = a_i^{p/2} \cdot a_i^{(p-2)/2}b_i$.

4.3.4 Zeigen Sie, dass $f''(t) \geq 0$; es ist nicht die einfachste Ableitung, aber wenn Sie es richtig machen, wird die Ungleichung in 4.2.3 genau das sein, was Sie brauchen, um zu beweisen, dass $f'' \geq 0$.

4.3.5 Schreiben Sie die Konvexitätsungleichung zwischen x und y und dem Mittelpunkt $(x+y)/2$. Um den allgemeinen Fall aus demjenigen mit positiven Koordinaten abzuleiten, beobachten Sie Folgendes. Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen Sie mit $\hat{x} := (|x_1|, \ldots, |x_n|)$, dann

$$|x+y|_p \leq |\hat{x}+\hat{y}|_p, \quad |\hat{x}|_p = |x|_p, \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4.4.2 Kombinieren Sie die Konkavität der Funktion $\log(\cdot)$ und die Cauchy–Schwartz-Ungleichung. Sie müssen die folgende kleine Verallgemeinerung der Konvexitätsungleichung verwenden: Für eine konkave Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$
$$\text{für alle } x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ mit } \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

4.4.3 Es könnte bequemer sein, mit $\log f(t)$ zu arbeiten; seien Sie vorsichtig bei der Berechnung, noch einmal wird die Ungleichung in 4.3.2 genau das sein, was Sie benötigen, um zu beweisen, dass $f' \geq 0$.

4.5.2 Denken Sie daran, dass aus der Definition folgt, dass $|f(x) - f(y)| \leq f(x-y)$... Und dass Lipschitz-Funktionen immer stetig sind.

4.5.3 Wenden Sie den Weierstraßschen Satz auf f an auf $S := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ und verwenden Sie, dass f, als Norm, nicht entartet ist.

4.5.5 Wenn f äquivalent ist zu $|\cdot|$ und $\tilde{f}$ äquivalent ist zu $|\cdot|$, folgt daraus durch Transitivität, dass f äquivalent ist zu $\tilde{f}$...

4.6 Erinnern Sie sich zunächst daran, dass $\|M\|^2$ die Summe der Quadrate der Einträge von M ist. Beachten Sie, dass $(\Psi \cdot \Phi)^i_j$ (die i-te Zeile und j-te Spalte) das Skalarprodukt von Ψ^i und Φ_j ist, die Vektoren von $\mathbb{R}^n$ sind. Wenden Sie Cauchy-Schwartz auf jedes von ihnen an.

4.7 Versuchen Sie $f(t) = (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$...

4.8.2 Wenden Sie den Mittelwertsatz auf $u(x+t\nu)$ an...

4.8.3 Betrachten Sie das Gebiet $U := \{(x,y) : x^2 < y < x^2+1\}$ und die Funktion

$$u(x,y) := \begin{cases} \max\{0, y-2\}^2 & \text{wenn } x \geq 0, \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$