Fragen, die mit (*) markiert sind, sind etwas komplexer. Sie könnten sie beim ersten Lesen überspringen. Hinweise sind auf der nächsten Seite verfügbar.

4.1. BONUS PROBLEM. Betrachten Sie die Funktion $u\colon (x,y) \mapsto x^{\sin(y)}$, definiert für $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\partial_x u$ und $\partial_y u$.

4.2. Zusammenhängende Graphen. Lassen Sie $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend sein und lassen Sie $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ sein. Zeigen Sie, dass sein Graph

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist.

4.3. *p*-Normen. Für $p \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$ definieren Sie die $p-$Norm von x als

$$|x|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}.$$

1. Für $n = 2$ und $p = 1, 2, 10$ skizzieren Sie die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_p \leq 1\}$.
2. Für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}^n$ berechnen Sie den Grenzwert $|x|_\infty := \lim_{p\to\infty} |x|_p$.
3. Beweisen Sie unter Verwendung einer geeigneten Ungleichung, die Sie im Unterricht gesehen haben, dass

   $$\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{p-1} b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{p-2} b_i^2\Big),$$

   wann immer a_i, b_i n-Tupel positiver Zahlen sind.
4. Fixieren Sie $x, y \in \mathbb{R}^n$ und betrachten Sie die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert als

   $$f(t) := |tx + (1-t)y|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |tx_i + (1-t)y_i|^p\Big)^{1/p}. \tag{1}$$

   Zeigen Sie, dass f konvex ist. Sie können zuerst annehmen, dass die Koordinaten von x und y alle streng positiv sind und die Ungleichheit des vorherigen Punktes verwenden.
5. Folgern Sie aus dem vorherigen Punkt, dass die Dreiecksungleichung gilt, d.h.

   $$|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

6. Was passiert für $p \in (0,1)$?

4.4. *p*-Mittel. Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit positiven Koordinaten und $p \neq 0$ definieren Sie das p-Mittel als

$$\mu_p(x) := \Big(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\Big)^{1/p}.$$

1. Berechnen Sie die Grenzwerte $p \to \pm\infty, p \to 0$ und definieren Sie entsprechend

$$\mu_{-\infty}(x), \quad \mu_0(x), \quad \mu_{+\infty}(x).$$

2. Zeigen Sie für jedes n-Tupel von Zahlen $a_i > 0$, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1 + \ldots + a_n} \log(a_i) \geq \log\Big(\frac{a_1 \ldots + a_n}{n}\Big).$$

3. Für ein festes x zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(t) := \mu_t(x)$, stetig und monoton steigend ist.

4. Beweisen Sie die arithmetisch-geometrische Ungleichung und die arithmetisch-quadratische Ungleichung:

$$n(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq x_1 + \ldots + x_n, \qquad (x_1 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

5. (*) Ist f im gesamten $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

4.5. Alle Normen sind äquivalent in $\mathbb{R}^n$. Sei $|\cdot|$ die Standard-Euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ und sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine andere Norm (eine Funktion, die die Eigenschaften von Definition 9.91 erfüllt).

1. Drücken Sie x in einer Basis aus und verwenden Sie die „abstrakten“ Eigenschaften, die f haben muss, um zu zeigen, dass es eine Konstante $C_1 > 0$ gibt, so dass

$$f(x) \leq C_1 |x| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Zeigen Sie, dass f in $\mathbb{R}^n$ stetig ist (in Bezug auf den Standardabstand von $\mathbb{R}^n$!).

3. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $c_2 > 0$ gibt, so dass

$$f(x) \geq c_2 \text{ für alle } |x| = 1.$$

4. Folgern Sie, dass $f(x) \geq c_2|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Zeigen Sie, dass wenn $\tilde{f}$ eine weitere Norm ist, dann gibt es $C > 0$, so dass

$$C^{-1} f(x) \leq \tilde{f}(x) \leq C f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

4.6. Hilbert-Schmidt-Norm der Komposition. Nehmen Sie zwei lineare Funktionen $\phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ und $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, und bezeichnen Sie mit Φ, Ψ die Matrizen, die sie in den kanonischen Basen repräsentieren. Erinnern Sie sich daran, dass die lineare Abbildung $\psi \circ \phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ in diesen Basen durch die Matrix $\Psi \cdot \Phi$ dargestellt wird. Zeigen Sie, dass

$$\|\Psi \cdot \Phi\| \leq \|\Psi\| \|\Phi\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Hilbert-Schmidt-Norm einer Matrix ist (siehe 10.1.3 in den Skript).

4.7. Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ für $m > 1$. Ist es wahr, dass es ein $t \in [0,1]$ gibt, so dass

$$f(1) - f(0) = Df_t(1) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{bmatrix}?$$

Beweisen Sie es oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

4.8. Ein Richtungsableitung verschwindet. Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\nu \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

1. Wenn $\partial_1 u \equiv 0$ dann "u hängt nicht von x_1 ab", genauer: es existiert eine eindeutige Funktion $v \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ so dass
$$u(x_1, \ldots, x_n) = v(x_2, \ldots, x_n) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$
2. Wenn $\partial_\nu u \equiv 0$ und $\nu \cdot e_1 \neq 0$ dann "u ist eine Funktion von $n-1$ Variablen", genauer: es existiert eine eindeutige Funktion $w \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ so dass
$$u(x_1, \ldots, x_n) = w(x_2 - \tfrac{x_1\nu_2}{\nu_1}, \ldots, x_n - \tfrac{x_1\nu_n}{\nu_1}) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$
3. (*) Was können wir folgern, wenn wir nur annehmen, dass $\partial_1 u = 0$ in einer offenen, zusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$?

Hinweise:

4.3.3 Verwenden Sie Cauchy–Schwartz und die Tatsache, dass $a_i^{p-1}b_i = a_i^{p/2} \cdot a_i^{(p-2)/2} b_i$.

4.3.4 Zeigen Sie, dass $f''(t) \geq 0$; es ist nicht die einfachste Ableitung, aber wenn Sie es richtig machen, wird die Ungleichung in 4.2.3 genau das sein, was Sie brauchen, um zu beweisen, dass $f'' \geq 0$.

4.3.5 Schreiben Sie die Konvexitätsungleichung zwischen x und y und dem Mittelpunkt $(x+y)/2$. Um den allgemeinen Fall aus demjenigen mit positiven Koordinaten abzuleiten, beobachten Sie Folgendes. Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen Sie mit $\hat{x} := (|x_1|, \ldots, |x_n|)$, dann

$$|x+y|_p \leq |\hat{x}+\hat{y}|_p, \quad |\hat{x}|_p = |x|_p, \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4.4.2 Kombinieren Sie die Konkavität der Funktion $\log(\cdot)$ und die Cauchy–Schwartz-Ungleichung. Sie müssen die folgende kleine Verallgemeinerung der Konvexitätsungleichung verwenden: Für eine konkave Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$
$$\text{für alle } x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ mit } \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

4.4.3 Es könnte bequemer sein, mit $\log f(t)$ zu arbeiten; seien Sie vorsichtig bei der Berechnung, noch einmal wird die Ungleichung in 4.3.2 genau das sein, was Sie benötigen, um zu beweisen, dass $f' \geq 0$.

4.5.2 Denken Sie daran, dass aus der Definition folgt, dass $|f(x) - f(y)| \leq f(x-y)$... Und dass Lipschitz-Funktionen immer stetig sind.

4.5.3 Wenden Sie den Weierstraßschen Satz auf f an auf $S := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ und verwenden Sie, dass f, als Norm, nicht entartet ist.

4.5.5 Wenn f äquivalent ist zu $|\cdot|$ und $\tilde{f}$ äquivalent ist zu $|\cdot|$, folgt daraus durch Transitivität, dass f äquivalent ist zu $\tilde{f}$...

4.6 Erinnern Sie sich zunächst daran, dass $\|M\|^2$ die Summe der Quadrate der Einträge von M ist. Beachten Sie, dass $(\Psi \cdot \Phi)^i_j$ (die i-te Zeile und j-te Spalte) das Skalarprodukt von Ψ^i und Φ_j ist, die Vektoren von $\mathbb{R}^n$ sind. Wenden Sie Cauchy-Schwartz auf jedes von ihnen an.

4.7 Versuchen Sie $f(t) = (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$...

4.8.2 Wenden Sie den Mittelwertsatz auf $u(x + t\nu)$ an...

4.8.3 Betrachten Sie das Gebiet $U := \{(x, y) : x^2 < y < x^2 + 1\}$ und die Funktion

$$u(x,y) := \begin{cases} \max\{0, y-2\}^2 & \text{wenn } x \geq 0, \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

4. Solutions

Solution of 4.1:

Solution of 4.2: Wir behaupten, dass Γ_f tatsächlich wegzusammenhängend ist. Seien $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ zwei Punkte in Γ_f. Da $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend ist, ist es wegzusammenhängend, daher gibt es $\gamma\colon [0,1] \to U$, sodass $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Dann verbindet der Weg

$$[0,1] \ni t \mapsto (\gamma(t), f(\gamma(t)))$$

$(x_0, f(x_0))$ mit $(x_1, f(x_1))$.

Solution of 4.3:

1.
2. $|x|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, let's prove it. Assume that $|x_1| \geq |x_j|$ for all j's, then

$$|x_1| \leq |x|_p = |x_1|\Big(1 + \tfrac{|x_n|^p}{|x_1|^p} + \ldots + \tfrac{|x_n|^p}{|x_1|^p}\Big)^{1/p} \leq |x_1|(1 + 1 + \ldots + 1)^{1/p} = |x_1| n^{1/p},$$

   and $|x_1| n^{1/p} \to |x_1|$ as $p \to \infty$.

3. Dies ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in Verkleidung:

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{p-1} b_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n \underbrace{a_i^{\frac{p}{2}-1} b_i}_{=:x_i} \underbrace{a_i^{\frac{p}{2}}}_{=:y_i}\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big) = \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{p-2} b_i^2\Big),$$

   bemerken Sie, dass wir nicht $p \geq 1$ verwendet haben, jedes $p \in \mathbb{R}$ hätte funktioniert.

4. Wir berechnen

$$f'(t) = \tfrac{1}{p} f(t)^{1-p} \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^n |tx_i + (1-t)y_i|^p\Big) = f(t)^{1-p} \sum_{i=1}^n |tx_i + (1-t)y_i|^{p-1}(x_i - y_i),$$

   und dann

$$\begin{aligned} f''(t) = (1-p) f(t)^{-p} f'(t) \sum_{i=1}^n &|tx_i + (1-t)y_i|^{p-1}(x_i - y_i) \\ &+ (p-1) f(t)^{1-p} \sum_{i=1}^n |tx_i + (1-t)y_i|^{p-2}(x_i - y_i)^2, \end{aligned}$$

   also ist $f'' \geq 0$ genau dann, wenn

$$\frac{f'(t)}{f(t)^{1-p}} \sum_{i=1}^n |tx_i + (1-t)y_i|^{p-1}(x_i - y_i) \leq f(t)^p \sum_{i=1}^n |tx_i + (1-t)y_i|^{p-2}(x_i - y_i)^2$$

   was durch Setzen von $a_i := |tx_i + (1-t)y_i|, b_i := x_i - y_i$, und Substitution von f, f' zu

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{p-1} b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{p-2} b_i^2\Big),$$

geführt wird, was wir im vorherigen Punkt bewiesen haben. Beachten Sie, dass wir bewiesen haben, dass

$$f''(t) = (p-1) \times \{\text{etwas } \geq 0\}$$

also haben wir bewiesen, dass wenn $p < 1$ dann f konkav ist.

5. Wenn die Koordinaten von x, y nicht-negativ sind, verwenden wir die Konvexitätsungleichung auf f und erhalten

$$\Big|\frac{x+y}{2}\Big|_p = f(1/2) \leq \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{|x|_p + |y|_p}{2},$$

vereinfachen wir die Faktoren 2, erhalten wir die Dreiecksungleichung.

Im allgemeinen Fall verwenden wir den Trick im Hinweis und finden

$$|x+y|_p \leq |\hat{x}+\hat{y}|_p \leq |\hat{x}|_p + |\hat{y}|_p = |x|_p + |y|_p.$$

6. Da f für $p < 1$ konkav ist, hat man die Umkehrungleichung:

$$|x+y|_p \geq |x|_p + |y|_p.$$

Solution of 4.4:

1. Dies ist ähnlich wie 4.3.2: $\mu_{+\infty}(x) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$, lass uns das beweisen. Nehmen wir an, dass $x_1 \geq x_j$ für alle j gilt, dann gilt

$$x_1 \geq \mu_p(x) = x_1\Big(1 + \tfrac{x_n^p}{x_1^p} + \ldots + \tfrac{x_n^p}{x_1^p}\Big)^{1/p} n^{-1/p} \geq x_1 n^{-1/p},$$

und $n^{-1/p} \to 1$ für $p \to \infty$.

Beachtend, dass $1/\mu_p(x) = \mu_{-p}(1/x)$ finden wir

$$\mu_{-\infty}(x) = \lim_{p \to -\infty} \mu_p(x) = \lim_{q \to +\infty} (\mu_{-q}(1/x))^{-1} = \Big(\max_i 1/x_i\Big)^{-1} = \Big(\frac{1}{\min_i x_i}\Big)^{-1} = \min_i x_i.$$

Schließlich ist $\mu_0(x) = (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$. Erinnere dich daran, dass

$$y^t = e^{t \log y} = 1 + t\log(y) + O(t^2) \quad \text{ wenn } t \to 0, \text{ mit } y > 0 \text{ fest.}$$

Wenn wir also den Logarithmus nehmen, finden wir

$$\begin{aligned}\log \mu_p(x) &= \frac{1}{p} \log \frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n} = \frac{1}{p} \log\Big(\frac{1 + \log(x_1)p + \ldots + 1 + \log(x_n)p + O(p^2)}{n}\Big) \\ &= \frac{1}{p}\log\Big(1 + \frac{p}{n}\{\log(x_1) + \ldots + \log(x_n)\} + O(p^2)\Big) \\ &= \frac{1}{p}\log\Big(1 + \frac{p}{n}\log(x_1 \cdots x_n) + O(p^2)\Big) = \frac{1}{n}\log(x_1 \cdots x_n) + O(p).\end{aligned}$$

2. Mit der Konvexitätsungleichung des Hinweises und der konvexen Funktion $x \mapsto x\log(x)$ sowie
$$x_i := a_i, \quad \lambda_i := \frac{1}{n}, \text{ für alle } i = 1, \dots, n,$$
finden wir
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \log(a_i) \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \log\Big(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\Big),$$
was wir erreichen wollten, nachdem wir die Terme umsortiert haben.

3. $f(t)$ ist stetig für alle $t \neq 0$, da es durch eine analytische Formel gegeben ist. Bei $t = 0$ haben wir gezeigt, dass das (bilaterale) Limit $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} \mu_t(x) = \mu_0(x) = f(0)$ endlich existiert, also nach Analysis I, ist $f(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Wenn wir die logarithmische Ableitung berechnen, finden wir
$$\begin{aligned}(\log f(t))' &= \frac{d}{dt}\frac{1}{t}\{\log(x_1^t + \ldots + x_n^t) - \log(n)\}\\ &= -\frac{1}{t^2}\log\Big(\frac{x_1^t + \ldots + x_n^t}{n}\Big) + \frac{1}{t}\frac{\frac{d}{dt}(x_1^t + \ldots + x_n^t)}{(x_1^t + \ldots + x_n^t)}\\ &= -\frac{1}{t^2}\log\Big(\frac{x_1^t + \ldots + x_n^t}{n}\Big) + \frac{1}{t^2}\frac{\log(x_1^t)x_1^t + \ldots + \log(x_n^t)x_n^t}{(x_1^t + \ldots + x_n^t)},\end{aligned}$$
was durch die Ungleichheit des vorherigen Punktes mit $a_i = x_i^t$ nichtnegativ ist. Diese Berechnung ist zumindest für $t \neq 0$ rigoros, und zeigt, dass $f(t)$ in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ zunimmt, also (da stetig) auf ganz $\mathbb{R}$ zunimmt.

4. Die AM-GM Ungleichung ist äquivalent zu $f(0) \leq f(1)$, während die $AM - QM$ Ungleichung äquivalent zu $f(1) \leq f(2)$ ist. Da wir bewiesen haben, dass f zunimmt, sind beide wahr.

5. Um zu verstehen, ob f von Klasse C^1 ist, müssen wir verstehen, ob f' stetig auf $t = 0$ erweitert. Da $(\log f)' = f'/f$ ist und $f(0) > 0$, ist es dasselbe zu zeigen, dass $(\log f)'$ stetig auf $t = 0$ erweitert wird. Also wählen wir die vorherige Formel und erweitern sie wie folgt:
$$\begin{aligned}&(\log f(t))' = \frac{1}{t^2}\Big\{\frac{\log(x_1^t)x_1^t + \ldots + \log(x_n^t)x_n^t}{(x_1^t + \ldots + x_n^t)} - \log\Big(\frac{x_1^t + \ldots + x_n^t}{n}\Big)\Big\}\\ &= \frac{1}{t^2}\Big\{\frac{\sum_{i=1}^n \log(x_i^t) + \log(x_i^t)^2 + O(t^3)}{\sum_{i=1}^n 1 + \log(x_i^t) + \log(x_i^t)^2 + O(t^3)} - \log\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{n}\log(x_i^t) + \tfrac{1}{n}\log(x_i^t)^2 + O(t^3)\Big)\Big\}\end{aligned}$$
wobei wir benutzt haben, dass für festes $z > 0$ gilt, wenn $t \to 0$,
$$\log(z^t)y^t = t\log(z) + t^2\log(z)^2 + O(t^3), \quad z^t = 1 + t\log(z) + t^2\log(z)^2 + O(t^3).$$

Jetzt verkürzen wir die Notation zu $y_i := \log(x_i)$ und berechnen alles wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(\log f(t))' &= \frac{1}{t^2}\left\{\frac{\sum_{i=1}^n ty_i + t^2y_i^2 + O(t^3)}{\sum_{i=1}^n 1 + ty_i + t^2y_i^2 + O(t^3)} - \log\Big(1 + \sum_{i=1}^n \tfrac{t}{n}y_i + \tfrac{t^2}{n}y_i^2 + O(t^3)\Big)\right\}\\
&= \frac{1}{t^2}\bigg\{\Big(\sum_{i=1}^n ty_i + t^2y_i^2 + O(t^3)\Big)\Big(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n ty_i + O(t^2)\Big)\\
&\qquad - \sum_{i=1}^n (\tfrac{t}{n}y_i + \tfrac{t^2}{n}y_i^2) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n \tfrac{t}{n}y_i\Big)^2 + O(t^3)\bigg\}\\
&= \frac{1}{t^2}\bigg\{\sum_{i=1}^n (\tfrac{t}{n}y_i + \tfrac{t^2}{n}y_i^2) - \Big(\sum_{i=1}^n \tfrac{t}{n}y_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^n (\tfrac{t}{n}y_i + \tfrac{t^2}{n}y_i^2) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n \tfrac{t}{n}y_i\Big)^2 + O(t^3)\bigg\}\\
&= -\frac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\Big)^2 + O(t),
\end{aligned}
$$

wobei wir die Entwicklungen benutzt haben

$$
\frac{1}{n+t} = \frac{1}{n} - \frac{t}{n^2} + O(t^2), \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3).
$$

Somit substituieren wir die y_i's zurück und beweisen

$$
-2f'(t) = f(t)\Big\{(\log f(0))^2 + O(t)\Big\} \quad \text{für } t \to 0,
$$

was beweist, dass f auch bei $t = 0$ stetig differenzierbar ist.

Solution of 4.5: Siehe Theorem 9.107 in den Notizen.

Solution of 4.6: Für $i \in \{1, \dots, m\}$ bezeichnen wir mit Ψ^i den Vektor $(\Psi^i_\ell)_{1\le\ell\le n}$ in $\mathbb{R}^n$. Für $j \in \{1, \dots, d\}$ bezeichnen wir mit Φ_j den Vektor $(\Phi^\ell_j)_{1\le\ell\le n}$ in $\mathbb{R}^n$. Beachten Sie, dass gemäß der Definition der Matrixmultiplikation gilt

$$
(\Psi \cdot \Phi)^i_j = \Psi^i \cdot \Phi_j.
$$

Nun, durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{R}^n$ haben wir

$$
\|\Psi \cdot \Phi\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^d |\Psi^i \cdot \Phi_j|^2 \le \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^d |\Psi^i|^2\,|\Phi_j|^2 = \Big(\sum_{i=1}^m |\Psi^i|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^d |\Phi_j|^2\Big) = \|\Psi\|^2\|\Phi\|^2.
$$

Solution of 4.7: Es ist falsch. Wenn $f(t) = (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$ ist, dann ist $f(1) - f(0) = 0 \in \mathbb{R}^m$, aber $|f'(t)| = 2\pi|(\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))| = 2\pi \ne 0$.

Solution of 4.8:

1. Setze $v(x_2, \dots, x_n) := u(0, x_2, \dots, x_n)$ für alle $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Nach Definition der Richtungsableitung haben wir für jedes festgelegte $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t, x_2, \dots, x_n) - v(x_2, \dots, x_n)\Big) = \partial_1 u(t, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

somit ist $t \mapsto u(t, x_2, \dots, x_n) - v(x_2, \dots, x_n)$ konstant. Da es bei $t = 0$ verschwindet, ist es konstant null, was zu beweisen war.

2. Mit der gleichen Argumentation: Betrachte die Differenz $u(x) - u(x + t\nu)$, fixiere das x und beweise, dass die Ableitung nach t null ist. Wir finden $u(x) = u(x + t\nu)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$. Nun wählen wir $-t := x_1/\nu_1$, damit die erste Koordinate verschwindet, und finden die gesuchte Formel.

3. Betrachte die Funktion u und den Definitionsbereich U des Hinweises. Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\partial_1 u = 0, \quad \partial_2 u = 2\max\{0, y - 2\},$$

welche offensichtlich stetig sind, also — nach der hinreichenden Bedingung aus der Vorlesung — haben wir $u \in C^1(U)$. Andererseits kann u nicht nur als Funktion von y geschrieben werden, da $2.5^2 = u(2, 4.5) \neq u(-2, 4.5) = 0$.

Die Darstellungsformel (**??**) gilt, wenn U eine besondere Struktur hat, nämlich sie ist "konvex in Richtung x_1", das heißt

$$x, y \in U, x - y \in \mathbb{R}e_1, t \in [0, 1] \Rightarrow tx + (1 - t)y \in U.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass wenn wir U mit der Ebene $\{x_1 = c\}$ schneiden, dann können wir jeden Punkt in U mit dieser Ebene verbinden, indem wir einem Pfad folgen, der mit e_1 ausgerichtet ist.