Probleme, die mit einem (*) markiert sind, sind etwas komplexer und können beim ersten Lesen übersprungen werden.

Wenn Sie nicht viel Zeit haben, konzentrieren Sie sich auf die mit (♡) markierten Probleme.

5.1. BONUS PROBLEM.

(a) Betrachten Sie $f(x,y) := xy^2e^{-x^2-y^2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie alle kritischen Punkte von f, das heißt alle Punkte, an denen der Gradient von f verschwindet. (Der Punkt wird nur dann gegeben, wenn alle numerischen Werte, die Sie finden, korrekt sind... überprüfen Sie also Ihre Berechnungen zweimal).

(b) Wir wollen eine Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit der folgenden Richtungsableitung finden:

$$\partial_v g(x,y) = 2\cos(x^2y)xv_2 + \cos(x^2y)v_1^2 y \quad \text{für alle } (x,y) \text{ und } (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Geben Sie ein explizites Beispiel für eine solche Funktion g an oder beweisen Sie, dass eine Funktion mit diesen Eigenschaften nicht existieren kann.

5.2. Lagrange Multiplikatoren (♡).

Betrachten Sie die Kugel $U := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 1\}$ und die Funktion

$$f(x,y,z) := 1 - x^2 - y^2 + 4x.$$

1. Begründen Sie rigoros, warum f sein absolutes Maximum und Minimum in $\overline{U}$ annimmt.
2. Finden Sie alle kritischen Punkte von f, die im Inneren von U liegen. Geben Sie an, ob $\sup_U f$ (oder $\inf_U f$) an einem Punkt in U angenommen wird.
3. Geben Sie an, ob $\max_{\partial U} f$ und $\min_{\partial U}$ existieren.
4. Finden Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die möglichen kritischen Punkte für das eingeschränkte Problem

$$\max\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in \partial U\},$$

und dasselbe für min.

5. Klären Sie unter allen gefundenen Punkten, an welchen Punkten das Maximum/Minimum von f erreicht wird.

5.3. Multiple Choice (♡).

Markiere alle und nur die wahren Aussagen

(a) As $|x| \to 0$, if $f(x) = x_2x_1^2 + O(x_1^2)$, then $f(x) = O(|x|^2)$.

(b) As $x \to 0$, if $f(x) = x_2x_1^2 + O(x_1^3)$, then $f(x) = O(x_1^3)$.

(c) As $|x| \to 0$, if $f(x) = x_2x_1 + O(|x|^2)$, then f is differentiable at $x = 0$.

(d) As $x \to 0$, if $f(x) = x_2x_1 + O(|x|^2)$, then f is twice differentiable around $x = 0$.

(e) As $|x| \to 0$, if $f(x) = x_2x_1 + O(|x|^3)$, then f is twice differentiable around $x = 0$ and $\partial_{11}f(0) = 0$.

5.4. Berechnung von Ableitungen. Für jede der folgenden Funktionen berechnen Sie die Richtungsableitung in der allgemeinen Richtung v an einem allgemeinen Punkt x, das heißt $\partial_v f(x)$. Geben Sie dann an, wo die Funktion differenzierbar ist, und geben Sie die Größe ihrer Jacobi-Matrix an.

1. ($\heartsuit$) $x_1/x_2, e^{-x_1/x_2}, e^{x_1x_2}\sin(x_1 + x_2^2), \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1^2x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1^2x_2}{x_1^2+x_2^4}$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. ($\heartsuit$) $|x|, |x|^\alpha, x/|x|, g(|x|), x \cdot e, g(x \cdot e)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}, e \in \mathbb{R}^n$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$.
3. $ax, x^T, \mathrm{Tr}(x), x^2, x^3, \mathrm{Tr}(x^2)$ für $x, a \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
4. (*) x^{-1}, x^{-2} für $x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det x \neq 0$.

5.5. Multiple Choice. Angenommen $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist so, dass

$$f(x) = x_1 + x_2x_1 + O(|x|^4) \text{ für } x \to 0.$$

Wir möchten die Taylorentwicklung von $(g \circ f)$ um $x = 0$ der höchstmöglichen Ordnung mit den uns vorliegenden Informationen berechnen.

Wir können den Wert $g^{(k)}(t)$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$ erfragen, müssen jedoch jedes Mal 5 CHF zahlen.

Für ein allgemeines g, welcher Grad des besten (d. h. höchst möglichen) Taylornullpolynoms können wir berechnen? Wie teuer wird es sein, es zu berechnen?

(a) Grad 3 und 20 CHF

(b) Grad 2 und 15 CHF

(c) Grad 2 und 10 CHF

(d) Grad 3 und 15 CHF

5.6. Polynome. Seien $P, Q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ Polynome von n Variablen. Nehmen Sie an, dass es positive Zahlen M und σ gibt, sodass

$$|P(x) - Q(x)| \leq M|x|^\sigma \text{ für alle } |x| \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass P und Q dieselben Koeffizienten kleinerer Ordnung als σ haben. Das heißt, wenn wir schreiben

$$P(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha, \qquad Q(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha X^\alpha,$$

dann gilt $a_\alpha = b_\alpha$ für alle $|\alpha| < \sigma$.

Hinweise:

5.3 Überprüfen Sie Korollar 10.33 erneut.

5.4 Um zu beweisen, dass eine Funktion **an** 0 differenzierbar ist, haben Sie zwei Werkzeuge

- die Definition der Differenzierbarkeit;
- die hinreichende Bedingung des Satzes 10.11.

Um zu beweisen, dass eine Funktion **nicht an** 0 differenzierbar ist, haben Sie zwei Werkzeuge

- Zeigen Sie, dass die notwendige Bedingung des Satzes 10.9 nicht erfüllt ist;
- Zeigen Sie, dass für eine bestimmte C^1-Kurve $\gamma\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ die Funktion $(f \circ \gamma)(t)$ an der Stelle $t = 0$ **nicht** differenzierbar ist. Dies könnte einfacher sein, da Sie eine Funktion von nur einer Variablen studieren müssen.

5.4.3 Diese Funktionen sind C^∞, versuchen Sie, sie für $x + tv$ zu berechnen und entwickeln Sie sie in Potenzen von t... Wenn Sie etwas finden, muss es das Taylorsche Polynom gemäß Korollar 10.33 sein. Aus dem Taylorschen Polynom lassen sich die Ableitungen sofort ablesen. Zum Beispiel

$$(x + tv)^2 = (x + tv)(x + tv) = x^2 + txv + tvx + t^2 = x^2 + (xv + vx)t + O(t^2)...$$