Probleme, die mit einem (*) markiert sind, sind etwas komplexer und können beim ersten Lesen übersprungen werden.

Wenn Sie nicht viel Zeit haben, konzentrieren Sie sich auf die mit (♡) markierten Probleme.

5.1. BONUS PROBLEM.

(a) Betrachten Sie $f(x,y) := xy^2e^{-x^2-y^2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie alle kritischen Punkte von f, das heißt alle Punkte, an denen der Gradient von f verschwindet. (Der Punkt wird nur dann gegeben, wenn alle numerischen Werte, die Sie finden, korrekt sind... überprüfen Sie also Ihre Berechnungen zweimal).

(b) Wir wollen eine Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit der folgenden Richtungsableitung finden:

$$\partial_v g(x,y) = 2\cos(x^2y)xv_2 + \cos(x^2y)v_1^2y \quad \text{für alle } (x,y) \text{ und } (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Geben Sie ein explizites Beispiel für eine solche Funktion g an oder beweisen Sie, dass eine Funktion mit diesen Eigenschaften nicht existieren kann.

5.2. Lagrange Multiplikatoren (♡).

Betrachten Sie die Kugel $U := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 1\}$ und die Funktion

$$f(x,y,z) := 1 - x^2 - y^2 + 4x.$$

1. Begründen Sie rigoros, warum f sein absolutes Maximum und Minimum in $\overline{U}$ annimmt.
2. Finden Sie alle kritischen Punkte von f, die im Inneren von U liegen. Geben Sie an, ob $\sup_U f$ (oder $\inf_U f$) an einem Punkt in U angenommen wird.
3. Geben Sie an, ob $\max_{\partial U} f$ und $\min_{\partial U}$ existieren.
4. Finden Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die möglichen kritischen Punkte für das eingeschränkte Problem

$$\max\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in \partial U\},$$

   und dasselbe für min.
5. Klären Sie unter allen gefundenen Punkten, an welchen Punkten das Maximum/Minimum von f erreicht wird.

5.3. Multiple Choice (♡).

Markiere alle und nur die wahren Aussagen

(a) As $|x| \to 0$, if $f(x) = x_2x_1^2 + O(x_1^2)$, then $f(x) = O(|x|^2)$.

(b) As $x \to 0$, if $f(x) = x_2x_1^2 + O(x_1^3)$, then $f(x) = O(x_1^3)$.

(c) As $|x| \to 0$, if $f(x) = x_2x_1 + O(|x|^2)$, then f is differentiable at $x = 0$.

(d) As $x \to 0$, if $f(x) = x_2x_1 + O(|x|^2)$, then f is twice differentiable around $x = 0$.

(e) As $|x| \to 0$, if $f(x) = x_2 x_1 + O(|x|^3)$, then f is twice differentiable around $x = 0$ and $\partial_{11} f(0) = 0$.

5.4. Berechnung von Ableitungen. Für jede der folgenden Funktionen berechnen Sie die Richtungsableitung in der allgemeinen Richtung v an einem allgemeinen Punkt x, das heißt $\partial_v f(x)$. Geben Sie dann an, wo die Funktion differenzierbar ist, und geben Sie die Größe ihrer Jacobi-Matrix an.

1. (♡) $x_1/x_2, e^{-x_1/x_2}, e^{x_1 x_2} \sin(x_1 + x_2^2), \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2+x_2^4}$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. (♡) $|x|, |x|^\alpha, x/|x|, g(|x|), x \cdot e, g(x \cdot e)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}, e \in \mathbb{R}^n$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$.
3. $ax, x^T, \mathrm{Tr}(x), x^2, x^3, \mathrm{Tr}(x^2)$ für $x, a \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
4. (*) x^{-1}, x^{-2} für $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det x \neq 0$.

5.5. Multiple Choice. Angenommen $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist so, dass

$$f(x) = x_1 + x_2 x_1 + O(|x|^4) \text{ für } x \to 0.$$

Wir möchten die Taylorentwicklung von $(g \circ f)$ um $x = 0$ der höchstmöglichen Ordnung mit den uns vorliegenden Informationen berechnen.

Wir können den Wert $g^{(k)}(t)$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$ erfragen, müssen jedoch jedes Mal 5 CHF zahlen.

Für ein allgemeines g, welcher Grad des besten (d. h. höchst möglichen) Taylornullpolynoms können wir berechnen? Wie teuer wird es sein, es zu berechnen?

(a) Grad 3 und 20 CHF

(b) Grad 2 und 15 CHF

(c) Grad 2 und 10 CHF

(d) Grad 3 und 15 CHF

5.6. Polynome. Seien $P, Q \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ Polynome von n Variablen. Nehmen Sie an, dass es positive Zahlen M und σ gibt, sodass

$$|P(x) - Q(x)| \leq M|x|^\sigma \text{ für alle } |x| \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass P und Q dieselben Koeffizienten kleinerer Ordnung als σ haben. Das heißt, wenn wir schreiben

$$P(X) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha, \qquad Q(X) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha X^\alpha,$$

dann gilt $a_\alpha = b_\alpha$ für alle $|\alpha| < \sigma$.

Hinweise:

5.3 Überprüfen Sie Korollar 10.33 erneut.

5.4 Um zu beweisen, dass eine Funktion **an** 0 differenzierbar ist, haben Sie zwei Werkzeuge

- die Definition der Differenzierbarkeit;
- die hinreichende Bedingung des Satzes 10.11.

Um zu beweisen, dass eine Funktion **nicht an** 0 differenzierbar ist, haben Sie zwei Werkzeuge

- Zeigen Sie, dass die notwendige Bedingung des Satzes 10.9 nicht erfüllt ist;
- Zeigen Sie, dass für eine bestimmte C^1-Kurve $\gamma\colon (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^n$ die Funktion $(f \circ \gamma)(t)$ an der Stelle $t = 0$ **nicht** differenzierbar ist. Dies könnte einfacher sein, da Sie eine Funktion von nur einer Variablen studieren müssen.

5.4.3 Diese Funktionen sind C^∞, versuchen Sie, sie für $x + tv$ zu berechnen und entwickeln Sie sie in Potenzen von t... Wenn Sie etwas finden, muss es das Taylorsche Polynom gemäß Korollar 10.33 sein. Aus dem Taylorschen Polynom lassen sich die Ableitungen sofort ablesen. Zum Beispiel

$$(x + tv)^2 = (x + tv)(x + tv) = x^2 + txv + tvx + t^2 = x^2 + (xv + vx)t + O(t^2)...$$

5. Solutions

Solution of 5.1:

(a) Durch Lösung des Systems

$$\begin{cases} 0 = \partial_x f = (1-2x^2)y^2 e^{-x^2-y^2} \\ 0 = \partial_y f = 2(y-y^3)xe^{-x^2-y^2} \end{cases}$$

finden wir $x \in \{\pm 1/\sqrt{2}\}, y \in \{0, \pm 1\}$, also sind die kritischen Punkte:

$$(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1), \quad (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1), \quad (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -1), \quad (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -1).$$

(b) Eine solche Funktion kann nicht existieren. Nach Proposition 10.9 muss $\partial_v g(x,y)$ eine lineare Funktion von v sein, wenn (x,y) festgehalten werden, und das ist nicht der Fall wegen des Terms v_1^2, der nichtlinear ist.

Solution of 5.2:

1. Da f stetig ist und $\overline{U}$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt) ist, muss es innerhalb von $\overline{U}$ seinen maximalen und minimalen Wert annehmen.
2. Wir sollen alle $(x,y,z) \in U$ finden, für die $\nabla f(x,y,z) = 0$ gilt, dies entspricht dem Lösen des Systems
$$\begin{cases} 0 = \partial_x f = 4 - 2x \\ 0 = \partial_y f = -2y \\ 0 = \partial_z f = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \end{cases}$$
was keine Lösungen hat, da die erste Gleichung $x = 2$ ergibt, was im Widerspruch zur letzten Bedingung steht. Da es keine kritischen Punkte in U gibt, folgt aus Proposition 11.4, dass f innerhalb von U weder sein Supremum noch sein Infimum annimmt.
3. Da ∂U kompakt ist, müssen sie existieren, durch dieselbe Argumentation wie in Punkt 1.
4. Nennen wir $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Nach Proposition 11.5 löst jeder kritische Punkt (relativ zum Minimierungsproblem, das auf den Rand beschränkt ist) das System
$$\begin{cases} 0 = \lambda_0 \partial_x f(x,y,z) + \lambda_1 \partial_x g(x,y,z) \\ 0 = \lambda_0 \partial_y f(x,y,z) + \lambda_1 \partial_y g(x,y,z) \\ 0 = \lambda_0 \partial_z f(x,y,z) + \lambda_1 \partial_z g(x,y,z) \\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

was zu

$$\begin{cases} 0 = \lambda_0(4-2x) + 2\lambda_1 x \\ 0 = \lambda_0(-2y) + 2\lambda_1 y \\ 0 = 2\lambda_1 z \\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

wird, was sich zu

$$\begin{cases} 0 = 2 - x + \lambda x = 2 + (\lambda-1)x \\ 0 = -y + \lambda y = (\lambda - 1)y \\ 0 = \lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

vereinfacht. Beachten Sie, dass wenn $\lambda_0 = 0$, dann würden wir $x = y = z = 0$ erhalten, was nicht auf ∂U liegt. Setzen wir also $\lambda := \lambda_1/\lambda_0$, so haben wir das äquivalente System

$$\begin{cases} 0 = 2 + (\lambda-1)x \\ 0 = (\lambda-1)y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

was $z = 0$ ergibt und das äquivalente System:

$$\begin{cases} 0 = 2 + (\lambda-1)x \\ 0 = (\lambda-1)y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

was $(x, \lambda) \in \{(-1, 3), (1, -1)\}$ und $y = 0$ erzwingt. Zusammengefasst sind die kritischen (x, y, z, λ):

$$(1, 0, 0, -1) \quad (-1, 0, 0, 3).$$

5. Da wir gezeigt haben, dass $\max_{\overline{U}}$ an einem Punkt $P \in \overline{U}$ erreicht wird und dass $P \notin U$ ist, müssen wir $P \in \partial U$ haben und, gemäß Proposition 11.5, dass P kritisch für das eingeschränkte Problem ist

$$\max_{\partial U} f.$$

Dasselbe Argument gilt für $\min_{\overline{U}} f$. Die einzigen beiden Kandidaten sind also

$$(1, 0, 0) \quad (-1, 0, 0).$$

Wir überprüfen:

$$f(1, 0, 0) = +4 \quad f(-1, 0, 0) = -4.$$

Also ist der Punkt $(1, 0, 0)$ ein absolutes Maximum für $f|_{\overline{U}}$ und der Punkt $(-1, 0, 0)$ ein absolutes Minimum für $f|_{\overline{U}}$.

Solution of 5.3:

(a) Wahr. Für $x \to 0$ haben wir $x_2 x_1^2 = O(|x|^3) \leq O(|x|^2)$ und $O(x_1^2) \leq O(|x|^2)$.

(b) Falsch. Die Funktion $x_2 x_1^2$ ist **nicht** $O(x_1^3)$, tatsächlich ist das Verhältnis

$$\frac{x_2 x_1^2}{x_1^3} = \frac{x_2}{x_1}$$

in jeder Umgebung des Ursprungs unbeschränkt.

(c) Wahr. Wenden Sie einfach die Definition der Differenzierbarkeit mit $Df(0) = 0$ an.

(d) Falsch. Nehmen wir zum Beispiel $f(x) = \max\{0, x_1\}^2$. Beachten Sie, dass die Aussage $f(x) = x_2 x_1 + O(|x|^2)$ genau dasselbe besagt wie $f(x) = O(|x|^2)$.

(e) Falsch. Dies wäre wahr, wenn wir die *a priori*-Annahme hätten, dass $f \in C^2$ in einer kleinen Umgebung um den Ursprung liegt. Ohne diese Annahmen ist es einfach, Gegenbeispiele wie in Analysis I zu konstruieren, zum Beispiel

$$f(x) = x_1 x_2 + |x|^4 \sin(|x|^{-100}),$$

so dass $|\partial_1 f(x)| \to \infty$ für $|x| \to 0$, also ist $\partial_1 f(x)$ nicht einmal stetig bei $x = 0$, geschweige denn differenzierbar.

Solution of 5.4:

1. Um die Richtungsableitungen der gegebenen Funktionen bezüglich des Richtungsvektors $v = (v_1, v_2)$ zu berechnen, verwenden wir die Definition der Richtungsableitung:

$$\partial_v f(x) = v \cdot \nabla f(x) = v_1 \partial_1 f(x) + v_2 \partial_2 f(x),$$

wobei $\nabla f(x)$ der Gradient der Funktion $f(x)$ ist.

- $f(x) = \frac{x_1}{x_2}$. Der Gradient von f ist $\nabla f(x) = \left(\frac{1}{x_2}, -\frac{x_1}{x_2^2}\right)$, also ist die Richtungsableitung
$$\partial_v f(x) = \frac{v_1}{x_2} - \frac{v_2 x_1}{x_2^2}.$$
Diese Funktion ist außerhalb des Ursprungs differenzierbar gemäß Satz 10.11. Diese Funktion ist am Ursprung nicht stetig, daher kann sie dort nicht differenzierbar sein.

- $f(x) = e^{-\frac{x_1}{x_2}}$. Der Gradient von f ist $\nabla f(x) = \left(\frac{1}{x_2} e^{-\frac{x_1}{x_2}}, \frac{x_1}{x_2^2} e^{-\frac{x_1}{x_2}}\right)$, also ist die Richtungsableitung
$$D_{\mathbf{v}} f(x) = \frac{v_1}{x_2} e^{-\frac{x_1}{x_2}} + \frac{v_2 x_1}{x_2^2} e^{-\frac{x_1}{x_2}}$$
Also ist f gemäß Satz 10.11 außerhalb des Ursprungs differenzierbar. Da f am Ursprung nicht stetig ist, kann sie dort nicht differenzierbar sein.

- $f(x) = e^{x_1x_2}\sin(x_1+x_2^2)$. Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x) = \left(x_2e^{x_1x_2}\sin(x_1+x_2^2), x_1e^{x_1x_2}\sin(x_1+x_2^2) + 2x_2e^{x_1x_2}\cos(x_1+x_2^2)\right).$$

Also ist die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}\partial_v f(x) = {} & v_1x_2e^{x_1x_2}\sin(x_1+x_2^2) \\ & + v_2\left(x_1e^{x_1x_2}\sin(x_1+x_2^2) + 2x_2e^{x_1x_2}\cos(x_1+x_2^2)\right)\end{aligned}$$

Also ist f gemäß Satz 10.11 überall differenzierbar.

- $f(x) = \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}$. Der Gradient von f ist $\nabla f(x) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)$, also ist die Richtungsableitung:

$$\partial_v f(x) = \frac{2x_1v_1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_1x_2v_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

Also ist f gemäß Satz 10.11 außerhalb des Ursprungs differenzierbar. Da f am Ursprung nicht stetig ist, kann sie dort nicht differenzierbar sein.

- $f(x) = \frac{x_1^2x_2}{x_1^2+x_2^2}$. Der Gradient von f ist $\nabla f(x) = \left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1^3-x_1x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)$, also ist die Richtungsableitung:

$$\partial_v f(x) = \frac{2x_1x_2v_1}{x_1^2+x_2^2} + \frac{(x_1^3-x_1x_2^2)v_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

Also ist f gemäß Satz 10.11 außerhalb des Ursprungs differenzierbar. Da f am Ursprung nicht stetig ist, kann sie dort nicht differenzierbar sein.

- $f(x) = \frac{x_1^2x_2}{x_1^2+x_2^4}$. Der Gradient von f ist $\nabla f(x) = \left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^4}, \frac{x_1^3-3x_1x_2^4}{(x_1^2+x_2^4)^2}\right)$, also ist die Richtungsableitung:

$$\partial_v f(x) = \frac{2x_1x_2v_1}{x_1^2+x_2^4} + \frac{(x_1^3-3x_1x_2^4)v_2}{(x_1^2+x_2^4)^2}.$$

Also ist f gemäß Satz 10.11 außerhalb des Ursprungs differenzierbar. Da f am Ursprung nicht stetig ist, kann sie dort nicht differenzierbar sein.

2. Wir bezeichnen mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$.

- $|x|$: Wir berechnen

$$\partial_v|x| = \sum_{i=1}^n v_i\partial_i(\sqrt{|x|^2}) = \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{2|x|}\partial_i(|x|^2) = \sum_{i=1}^n \frac{v_ix_i}{|x|} = \frac{\langle x,v\rangle}{|x|}.$$

$|x|$ ist außerhalb des Ursprungs differenzierbar. Es ist **nicht** differenzierbar bei $x=0$, wie man durch Widerspruch sehen kann. Nehmen Sie an, dass es für einige $\xi\in\mathbb{R}^n$ gilt

$$|x| = \langle x,\xi\rangle + o(|x|) \text{ für } |x|\to 0.$$

Testen wir dies entlang der Linien $x=\pm t\xi$ für $t\downarrow 0$, so finden wir notwendigerweise $\xi=0$, also $|x| = o(|x|)$, was unmöglich ist.

- $|x|^\alpha$: Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial|x|^\alpha}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(|x|^\alpha) = \frac{\partial}{\partial v}\left((x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\alpha/2}\right) \\ &= \frac{\alpha}{2}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\alpha/2-1}\frac{\partial}{\partial v}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) = \alpha|x|^{\alpha-2}\langle x, v\rangle\end{aligned}$$

  Für $\alpha > 1$ haben wir

$$\lim_{|x|\to 0}\left|\frac{\partial|x|^\alpha}{\partial v}\right| = \lim_{|x|\to 0} O(|x|^{\alpha-1}) = 0,$$

  also gemäß Satz 10.11 ist $|x|^\alpha$ von der Klasse $C^1(\mathbb{R}^n)$. Im Fall $\alpha \leq 1$ haben wir am Ursprung keine Differenzierbarkeit.

- $\frac{x}{|x|}$: Mit Leibnitz und der vorherigen Identität verwenden wir

$$\partial_v(x/|x|) = \partial_v(x)|x|^{-1} + x\partial_v(|x|^{-1}) = \frac{v|x|^2 - \langle x, v\rangle x}{|x|^3}.$$

  Da $x/|x|$ am Ursprung nicht stetig ist, ist es auch nicht differenzierbar.

- $g(|x|)$: Mit der Kettenregel

$$\partial_v g(|x|) = g'(x)\partial_v|x| = g'(|x|)\frac{\langle x, v\rangle}{|x|}$$

  Ein ähnliches Argument wie bei den ersten beiden oben zeigt, dass g am Ursprung differenzierbar ist, wenn und nur wenn $\lim_{t\to 0^+} g'(t) = 0$.

- $x \cdot e$, als lineare Funktion, stimmt mit ihrer Ableitung überein. Überprüfen wir es:

$$\frac{\partial(x\cdot e)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = e\cdot v.$$

- $g(x\cdot e)$: Mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial g(x\cdot e)}{\partial v} = g'(x)\frac{\partial(x\cdot e)}{\partial v} = g'(x\cdot e)(e\cdot v)$$

  und es ist von der Klasse C^1, da es eine Komposition von C^1-Funktionen ist.

3. Die Abbildungen ax, a^T und $\mathrm{Tr}(x)$ sind linear, daher ist ihre Ableitung leicht mit der Definition zu berechnen:

$$\partial_v(ax) = av, \quad \partial_v(x^T) = v^T \text{ und } \partial_v(\mathrm{Tr}(x)) = \mathrm{Tr}(v).$$

   Für x^2 ist es praktisch, Proposition 10.33 zu verwenden (es ist von der Klasse C^2, da die Einträge von x^2 Polynome der Einträge von x sind).

$$(x+tv)^2 = (x+tv)(x+tv) = x^2 + txv + tvx + t^2 = x^2 + (xv+vx)t + O(t^2), \quad (1)$$

und so muss gelten

$$\partial_v x^2 = xv + vx \qquad \text{(was im Allgemeinen } \textbf{nicht } 2xv \text{ ist!!!)}.$$

Ähnlich für x^3 findet man

$$\partial_v x^3 = x^2 v + xvx + vx^2.$$

Wenn wir die Spur anwenden, können wir sie mit der Ableitung vertauschen, also kann man vermuten

$$\partial_v \mathrm{Tr}(x^2) = \mathrm{Tr}(xv + vx) = 2\mathrm{Tr}(xv),$$

man kann es auch prüfen, indem man (1) nachverfolgt

$$\mathrm{Tr}((x+tv)^2) = \mathrm{Tr}(x^2) + 2t\mathrm{Tr}(xv) + t^2\mathrm{Tr}(v^2) = \mathrm{Tr}(x^2) + 2t\mathrm{Tr}(xv) + O(t^2).$$

4. Definiere $U := \{x \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(x) \neq 0\}$ und beachte, dass es offen ist (warum?). Wir beginnen damit zu beobachten, dass die Funktion $\iota\colon x \mapsto x^{-1}$ glatt (d. h. C^∞) von U in sich ist, da die Formel für die Einträge der inversen Matrix explizit und algebraisch ist, solange wir in U sind [1] Also wissen wir, dass es ein $\partial_v \iota(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass

$$(x+tv)^{-1} = x^{-1} + t\partial_v\iota(x) + O(t^2), \qquad \text{für } t \to 0.$$

Wir verwenden erneut die algebraischen Eigenschaften der Inversen:

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{n\times n} &= (x+tv)^{-1}(x+tv) = (x+tv)(x^{-1} + t\partial_v\iota(x) + O(t^2)) \\ &= \mathbf{1}_{n\times n} + tvx^{-1} + tx\partial_v\iota(x) + O(t^2).\end{aligned}$$

Vereinfachen wir, so finden wir

$$vx^{-1} + x\partial_v\iota(x) = O(t),$$

also ist die einzige Möglichkeit, dass

$$vx^{-1} + x\partial_v\iota(x) = 0,$$

was schließlich zu führt

$$\partial_v\iota(x) = -x^{-1}vx^{-1}.$$

Nun können wir $\partial_v(x^{-2})$ berechnen. Wir nennen $\sigma\colon U \to U$ die Abbildung $x \mapsto x^2$ und so dass $x^{-2} = \sigma \circ \iota(x)$. Erinnern Sie sich daran, dass wir gezeigt haben $\partial_w\sigma(y) = yw + wy$. Wir wenden die Kettenregel an

$$\partial_v(\sigma\circ\iota)(x) = \partial_{\partial_v\iota(x)}\sigma(\iota(x)) = \iota(x)\cdot\partial_v\iota(x) + \partial_v\iota(x)\cdot\iota(x) = -x^{-2}vx^{-1} - x^{-1}vx^{-2}.$$

[1] Diese Formel ist kompliziert und wir wollen sie nicht direkt verwenden, aber es ist nützlich zu wissen, dass sie existiert und dass sie die Form hat

$$(x^{-1})_{ij} = \frac{\text{Polynom in den Einträgen von } x}{\det x},$$

also ist sie glatt, solange $\det(x) \neq 0$, das heißt $x \in U$.

Solution of 5.5: Die Antwort ist (a). Da f bis zu einem Fehler von $O(|x|^4)$ gegeben ist, besteht keine Hoffnung, ein Taylornullpolynom mit einem Grad größer als 3 zu finden (zum Beispiel könnte g die Identität sein). Wenn wir nun die Taylorentwicklung von $(g \circ f)(x)$ berechnen, finden wir

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(x_1 + x_1x_2 + O(|x|^4)) \\ &= g(0) + g'(0)(x_1 + x_1x_2 + O(|x|^4)) + \tfrac{g''(0)}{2}(x_1 + x_1x_2 + O(|x|^4))^2 \\ &\quad + \tfrac{g'''(0)}{6}(x_1 + x_1x_2 + O(|x|^4))^3 + O((x_1 + x_1x_2 + O(|x|^4))^4) \\ &= g(0) + g'(0)(x_1 + x_1x_2) + \tfrac{g''(0)}{2}(x_1^2 + 2x_1^2x_2) + \tfrac{g'''(0)}{6}x_1^3 + O(|x|^4).\end{aligned}$$

Also benötigen wir die Zahlen $g(0), g'(0), g''(0), g'''(0)$, für die wir 20 CHF zahlen müssen. Beachten Sie, dass es billiger gewesen wäre, wenn wir die andere Annahme gehabt hätten

$$f(x) = x_2x_1 + O(|x|^4) \text{ für } x \to 0.$$

Solution of 5.6: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $Q = 0$ ist und dass P Grad $N < \sigma$ hat. Dann muss gelten

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{|P(rx)|}{r^m} \leq \limsup_{r \downarrow 0} M r^{\sigma - m} = 0 \text{ für alle } m \leq N. \tag{2}$$

Nehmen Sie an, dass P nicht null ist und wählen Sie den kürzesten Multiindex $\gamma \in \mathbb{N}^n$, für den $a_\gamma \neq 0$ gilt, dann haben wir

$$\begin{aligned}|P(rx)| &\geq r^{|\gamma|}\Big|\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = |\gamma|} a_\alpha x^\alpha\Big| - r^{|\gamma|+1}\Big|\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, N \geq |\alpha| > |\gamma|} a_\alpha r^{|\alpha| - |\gamma| - 1} x^\alpha\Big| \\ &\geq r^{|\gamma|}\Big|\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = |\gamma|} a_\alpha x^\alpha\Big| - C r^{|\gamma|+1}.\end{aligned}$$

Da $|\gamma| \leq N$ ist, folgt aus (2), dass $\left|\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = |\gamma|} a_\alpha x^\alpha\right| = 0$. Aber x war beliebig und das bedeutet, dass alle a_α mit $|\alpha| = |\gamma|$ null sind, was im Widerspruch zur Wahl von γ steht.