Problems marked with a (*) are a bit more complex and can be skipped at a first read.

If you don't have a lot of time focus on the Problems/subquestions marked with (♡).

6.1. BONUS PROBLEM. Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine konvexe Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $z \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt von f ist, genau dann wenn z ein globaler Minimizer ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für solch eine Funktion f in einigen $\mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ an, die immer nichtnegativ ist, aber keinen Minimalpunkt hat. Das heißt

$$f(x) > \inf_{\mathbb{R}^n} f \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Sie können alle in der Klasse behandelten Sätze verwenden.

6.2. Die Signatur einer 2×2 Matrix. Trotz der Definition ist es nicht notwendig, die Eigenwerte einer Matrix zu berechnen, um ihre Signatur zu finden[1]. Beweisen Sie, dass wir für eine 2×2 Matrix M die folgende einfache Regel zur Bestimmung der Signatur in Bezug auf $\det M$ und $\mathrm{Tr} M$ haben:

- Wenn $\det M > 0, \mathrm{Tr} M > 0$ ist, dann ist M positiv definit,
- Wenn $\det M > 0, \mathrm{Tr} M < 0$ ist, dann ist M negativ definit,
- Wenn $\det M < 0$ ist, dann ist M indefinit,
- Wenn $\det M = 0$ ist, dann ist M degeneriert.

6.3. Isoperimetrische Dreiecke. Unter allen Dreiecken mit einem Umfang von 2 sollen diejenigen mit der größten Fläche gefunden werden. Sie können die Heronsche Formel voraussetzen, die die Fläche eines Dreiecks in Bezug auf die Längen seiner Seiten x, y, z angibt:

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}, \qquad \text{mit } 2p := x + y + z,$$

so dass in unserem Fall $p = 1$.

6.4. Baryzentrum (♡). Seien $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt gibt, für den

$$f(x) = \|x - y_1\|^2 + \cdots + \|x - y_k\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

minimal ist, und bestimmen Sie diesen Punkt.

6.5. Lineare Regression I (♡). Sie studieren den Immobilienmarkt in Zürich über ein Jahr, in dem N Häuser verkauft werden. Sie verfolgen die Größe der Häuser $x_1, \dots, x_N$

[1] Fragen Sie ChatGPT nach dem Satz über die Hauptminoren

und die entsprechenden Verkaufspreise $y_1, \ldots, y_N$. Jetzt möchten Sie "die" Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finden, die

$$\text{Verkaufspreis} = f(\text{Größe des Hauses}),$$

gibt und Sie machen die (nicht unvernünftige) Annahme, dass f affin ist, d.h., $f_{a,b}(x) = ax + b$ für einige Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$. Unter all diesen Funktionen finden Sie (in Bezug auf die von Ihnen gesammelten Daten) den Wert der Parameter a, b, der den durchschnittlichen quadratischen Fehler minimiert

$$E(a,b) := \sum_{i=1}^{N} (y_i - f_{a,b}(x_i))^2, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

6.6. Konvexe Funktionen (♡). Entscheide, ob die folgenden Funktionen f_i im konvexen Bereich $U_i \subset \mathbb{R}^n$ konvex sind. Versuche in jedem Fall, das einfachste Argument zu finden, du kannst fast immer lange Berechnungen vermeiden.

1. $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4y$ definiert in $U_1 = \mathbb{R}^2$
2. $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ definiert in $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{10000}\}$
3. $f_3(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy$ definiert in $U_3 = \mathbb{R}^2$
4. $f_4(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy$ definiert in $U_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 10x < |y|\}$
5. $f_5(x) = \phi(g(x)), x \in U_5$ wobei $g \in C^2(U_5)$ irgendeine konvexe Funktion in $U_5 \subset \mathbb{R}^n$ ist und $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ irgendeine konvexe und steigende Funktion ist.
6. $f_6(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^{1/2}$ definiert in $U_6 = \mathbb{R}^2$
7. $f_7(x,y) = -(1 + x^2 + y^2)^{-1/2}$ definiert in $U_7 = \mathbb{R}^2$
8. $f_8(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ in $U_8 = \mathbb{R}^n$, wobei $p \geq 1$ ein fester Exponent ist.
9. $f_9(x) = \max\{\phi(x), \psi(x)\}$ wobei $\phi, \psi \in C(U_9)$ ein beliebiges Paar von konvexen Funktionen definiert in einem offenen Bereich $U_6 \subset \mathbb{R}^n$ sind.
10. $f_{10}(x) = |x|$ definiert in $U_{10} = \mathbb{R}^n$.
11. $f_{11}(x) = \phi(|x|)$ in $U_{11} = B_1 \subset \mathbb{R}^n$, wobei $\phi \in C(\mathbb{R})$ eine beliebige konvexe Funktion ist.

6.7. Multiple Choice. Unter den folgenden Aussagen über konvexe Funktionen markieren Sie diejenigen (und nur diejenigen), die immer wahr sind.

(a) If $f \in C^1(U)$ is convex in some open convex set $U \subset \mathbb{R}^n$ and f has a local maximum at $z \in U$, then $\nabla f \equiv 0$ in U.

(b) If $f \in C^1(U)$ is convex in some open convex set $U \subset \mathbb{R}^n$ and f has a global maximum at $z \in U$, then $\nabla f \equiv 0$ in U.

(c) Assume $f_n \in C^2(\mathbb{R})$ is a sequence of convex functions that converge pointwise to some $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Is f necessarily convex?

(d) There exists a convex function $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ such that

$$f(x) = 1 - 2x_1 + x_2^3 + O(|x|^4) \text{ as } |x| \to 0.$$

(e) There exists a convex function $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ such that

$$f(x) = 1 - 2x_1 + x_2^4 + O(|x|^4) \text{ as } |x| \to 0.$$

(f) A convex set is not necessarily connected.

6.8. Multiple choice. Die Hesse-Matrix von $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist an einem kritischen Punkt x_0 von f positiv semidefinit, d.h.,

$$\langle v, Hf(x_0)v\rangle \geq 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Welche der folgenden Aussagen treffen notwendigerweise zu? (Es können mehrere zutreffen).

(a) x_0 ist ein strenges lokales Minimum von f.

(b) x_0 ist ein lokales Minimum von f.

(c) x_0 ist kein lokales Maximum von f.

(d) Keine der obigen Aussagen.

6.9. Minimierung. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf…

(a) …dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(b) …der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6.10. Lagrange-Multiplikatoren (♡). Betrachten Sie die Funktion $f(x, y, z) = 3x - y + 2z$ und die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}.$$

Bestimmen Sie die Extrema von f auf M und deren Art.

6.11. Kritische Punkte. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$ mit reellen Parametern $a, b \in \mathbb{R}$. Finde alle kritischen Punkte und bestimme ihre Art mit dem Hessischen Test, abhängig von a, b.

Hinweise:

6.2 Verwenden Sie den spektralen Satz und die Eigenschaften:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

6.3 Minimieren Sie A^2 anstelle von A. Sie können die Methode der Lagrange-Multiplikatoren verwenden.

6.5 Lassen Sie sich nicht von der Einstellung ablenken, schließlich müssen Sie ein quadratisches Polynom von a, b minimieren....