

Problems marked with a (*) are a bit more complex and can be skipped at a first read.
If you don't have a lot of time focus on the Problems/subquestions marked with (♡).

7.1. BONUS PROBLEM.

- (a) Geben Sie einen Diffeomorphismus zwischen \mathbb{R}^2 und $(0, 1) \times (0, 1)$ an.
- (b) Ist $f(x) = x^5, x \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus von \mathbb{R} auf sich selbst? Begründen Sie Ihre Antwort streng.

7.2. Inverse Funktion I. (♡) Betrachte die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch $F(x, y) = (x^2y, xy^2)$. Zeige, dass F lokal um alle Punkte (x, y) , für die $x \neq 0$ und $y \neq 0$ gilt, invertierbar ist. Berechne die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion von F am Punkt $F(2, 1)$.

7.3. Implizit Funktion I. Zeichnen Sie die Menge aller Nullstellen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$,
2. $f(x, y) = y^2(1 - x) - x^3$,
3. $f(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$,
4. $f(x, y) = xy(x + y - 1)$,
5. $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$.

Sie können dazu auch eine Software zur Hilfe benutzen. An welchen Punkten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ folgt mit dem Satz zur impliziten Funktion, dass die Funktion lokal nach x (beziehungsweise nach y , nach beiden oder eventuell nach gar keiner Variabel) auflösbar ist? Zeichnen Sie diese Punkte in ihrer Skizze (am besten mit vier verschiedenen Farben) ein.

7.4. Multiple-Choice. (♡) Markiere alle und nur die wahren Aussagen

- (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\det Jf(x) > 0$ für alle $x \in U$. Dann ist die Menge $f(U)$ offen.
- (b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\det Jf(x) > 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f injektiv.
- (c) Gibt es einen Diffeomorphismus $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ so dass $\phi(U) = V$, wobei $U := \{x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und $V := \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
- (d) (*) Sei T ein Dreieck und Q ein Quadrat in der Ebene (nur der Rand, nicht das Innere). Gibt es einen Diffeomorphismus $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass $\phi(T) = Q$?

7.5. Implizit Funktion II. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1, \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1, \end{cases}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 1, 0)$ nach den Variablen u und v auflösbar ist und bestimmen Sie die Ableitungen $D_{(0,1,1)}u$ und $D_{(0,1,1)}v$ der so definierten impliziten Funktionen $u = u(x, y, z)$ und $v = v(x, y, z)$.

7.6. Kugelkoordinaten. Die Abbildung $\Phi: (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

nennt man *Kugelkoordinaten*.

1. Skizzieren Sie die Bilder von $r \mapsto \Phi(r, \theta_0, \varphi_0)$, $\theta \mapsto \Phi(r_0, \theta, \varphi_0)$ und $\varphi \mapsto \Phi(r_0, \theta_0, \varphi)$ für einige feste $r_0 \in (0, \infty)$, $\theta_0 \in (0, \pi)$, $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$.
2. Was ist das Bild von Φ ?
3. Zeigen Sie, dass $\det(D_{(r,\theta,\varphi)}\Phi) = r^2 \sin \theta$ gilt.
4. Folgern Sie, dass die Abbildung Φ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist.

7.7. IFT is only a necessary condition. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = y^2(1 - x) - x^3$ aus Aufgabe 7.3.2 etwas vertiefter.

1. Zeigen Sie, dass wir aus dem Satz zur impliziten Funktion nicht folgern können, dass f in einer Umgebung von $(0, 0)$ nach der Variabel x auflösbar ist.
2. Zeigen Sie, dass aber die Gleichung $f(x, y) = 0$ sogar überall eindeutig nach x aufgelöst werden kann.
 Hinweis: Analysieren Sie die Abbildung $x \mapsto \frac{x^3}{1-x}$ auf einem geeigneten Definitionsbereich.
3. Bezeichne mit $Y(x)$ die Funktion, sodass $f(x, Y(x)) = 0$ um $x = 2$ herum. Berechne $Y''(1)$. Hinweis: leite zweimal nach x die Identität $f(x, Y(x)) = 0$ ab und evaluieren Sie sie an der Stelle $x = 2$.