Problems marked with a (*) are a bit more complex and can be skipped at a first read.

If you don't have a lot of time focus on the Problems/subquestions marked with (♡).

7.1. BONUS PROBLEM.

(a) Geben Sie einen Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^2$ und $(0,1) \times (0,1)$ an.

(b) Ist $f(x) = x^5, x \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$ auf sich selbst? Begründen Sie Ihre Antwort streng.

7.2. Inverse Funktion I. (♡) Betrachte die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $F(x,y) = (x^2y, xy^2)$. Zeige, dass F lokal um alle Punkte (x,y), für die $x \neq 0$ und $y \neq 0$ gilt, invertierbar ist. Berechne die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion von F am Punkt $F(2,1)$.

7.3. Implizit Funktion I. Zeichnen Sie die Menge aller Nullstellen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$,
2. $f(x,y) = y^2(1-x) - x^3$,
3. $f(x,y) = y^2 - x^2(x+1)$,
4. $f(x,y) = xy(x+y-1)$,
5. $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$.

Sie können dazu auch eine Software zur Hilfe benutzen. An welchen Punkten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ folgt mit dem Satz zur impliziten Funktion, dass die Funktion lokal nach x (beziehungsweise nach y, nach beiden oder eventuell nach gar keiner Variabel) auflösbar ist? Zeichnen Sie diese Punkte in ihrer Skizze (am besten mit vier verschiedenen Farben) ein.

7.4. Multiple-Choice. (♡) Markiere alle und nur die wahren Aussagen

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\det Jf(x) > 0$ für alle $x \in U$. Dann ist die Menge $f(U)$ offen.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\det Jf(x) > 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f injektiv.

(c) Gibt es einen Diffeomorphismus $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so dass $\phi(U) = V$, wobei $U := \{x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und $V := \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

(d) (*) Sei T ein Dreieck und Q ein Quadrat in der Ebene (nur der Rand, nicht das Innere). Gibt es einen Diffeomorphismus $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so dass $\phi(T) = Q$?

7.5. Implizit Funktion II. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1, \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1, \end{cases}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 1, 0)$ nach den Variablen u und v auflösbar ist und bestimmen Sie die Ableitungen $D_{(0,1,1)}u$ und $D_{(0,1,1)}v$ der so definierten impliziten Funktionen $u = u(x, y, z)$ und $v = v(x, y, z)$.

7.6. Kugelkoordinaten. Die Abbildung $\Phi\colon (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

nennt man *Kugelkoordinaten*.

1. Skizzieren Sie die Bilder von $r \mapsto \Phi(r, \theta_0, \varphi_0)$, $\theta \mapsto \Phi(r_0, \theta, \varphi_0)$ und $\varphi \mapsto \Phi(r_0, \theta_0, \varphi)$ für einige feste $r_0 \in (0, \infty)$, $\theta_0 \in (0, \pi)$, $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$.
2. Was ist das Bild von Φ?
3. Zeigen Sie, dass $\det(D_{(r,\theta,\varphi)}\Phi) = r^2 \sin\theta$ gilt.
4. Folgern Sie, dass die Abbildung Φ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist.

7.7. IFT is only a necessary condition. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = y^2(1 - x) - x^3$ aus Aufgabe 7.3.2 etwas vertiefter.

1. Zeigen Sie, dass wir aus dem Satz zur impliziten Funktion nicht folgern können, dass f in einer Umgebung von $(0, 0)$ nach der Variabel x auflösbar ist.
2. Zeigen Sie, dass aber die Gleichung $f(x, y) = 0$ sogar überall eindeutig nach x aufgelöst werden kann.
   Hinweis: Analysieren Sie die Abbildung $x \mapsto \frac{x^3}{1-x}$ auf einem geeigneten Definitionsbereich.
3. Bezeichne mit $Y(x)$ die Funktion, sodass $f(x, Y(x)) = 0$ um $x = 1/2$ herum. Berechne $Y''(1/2)$. Hinweis: leite zweimal nach x die Identität $f(x, Y(x)) = 0$ ab und evaluieren Sie sie an der Stelle $x = 1/2$.

7. Solutions

Solution of 7.1:

(a) $(x,y) \mapsto (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2\pi}(\arctan(x), \arctan(y))$

(b) Nein, weil $f'(0) = 0$. Ausführlicher: Wenn f ein Diffeomorphismus wäre, dann sei g die Umkehrfunktion. Es würde gelten $g'(f(x)) = 1/f'(x) = x^{-5}/5$, was unmöglich ist, wenn $x \to 0$. Andererseits sollte g in einer Umgebung von $f(0)$ regulär sein.

Solution of 7.2:

Die Jacobi-Matrix von f ist

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}, \quad \det JF(x,y) = 3x^2y^2,$$

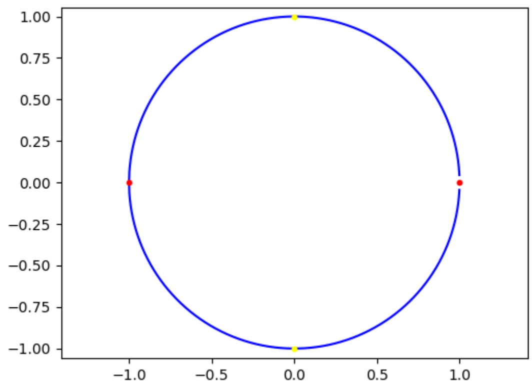
die genau in der Menge $\{x=0\} \cup \{y=0\}$ verschwindet. Nach der Formel

$$JF^{-1}(4,2) = JF^{-1}(F(2,1)) = JF(2,1)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

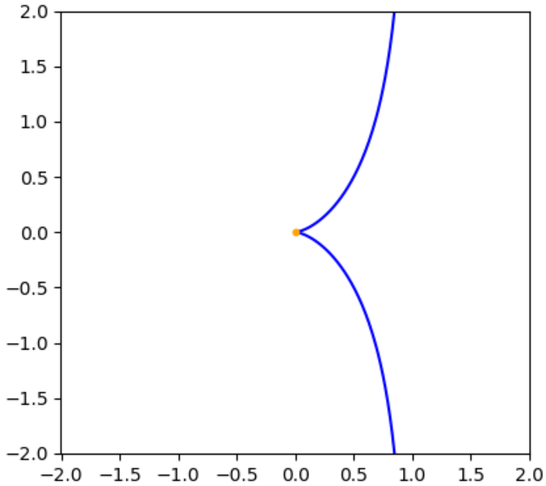
Solution of 7.3: Wir zeichnen im Folgenden die Nullstellenmenge $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ der Funktion f. Mit dem Satz zur impliziten Funktion unterscheiden wir folgende Fälle:

- die Punkte, bei denen man lokal nach x und nach y auflösen kann, in blau (also $\{(x,y) \in N \mid \partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y) \neq 0\}$),
- die Punkte, bei denen man lokal nach y aber eventuell nicht nach x auflösen kann, in gelb (also $\{(x,y) \in N \mid \partial_x f(x,y) = 0, \partial_y f(x,y) \neq 0\}$),
- die Punkte, bei denen man lokal nach x aber eventuell nicht nach y auflösen kann, in rot (also $\{(x,y) \in N \mid \partial_x f(x,y) \neq 0, \partial_y f(x,y) = 0\}$),
- die Punkte, bei denen man lokal eventuell weder nach x und noch nach y auflösen kann, in orange (also $\{(x,y) \in N \mid \partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 0\}$).

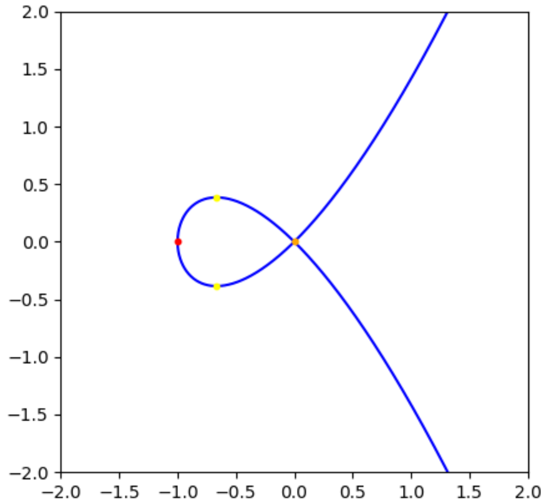
1. $D_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$



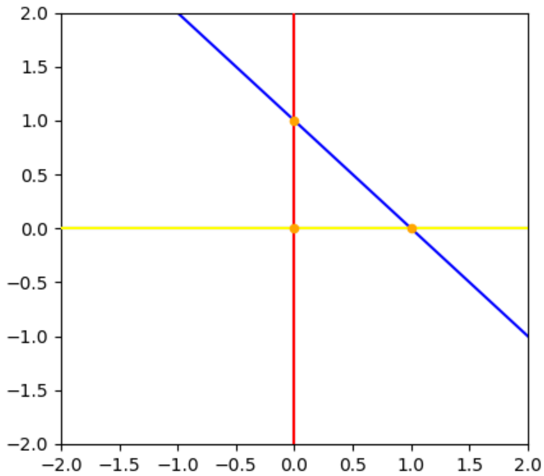
2. $D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} -(y^2+3x^2) \\ 2y(1-x) \end{pmatrix}$



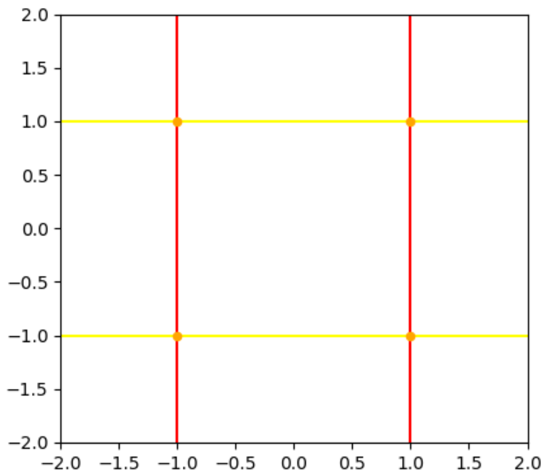
3. $D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} -x(3x+2) \\ 2y \end{pmatrix}$



4. $D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} y(2x+y-1) \\ x(x+2y-1) \end{pmatrix}$



5. Die Funktion ist $f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)$. Wir erhalten $D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 2x(y^2-1) \\ 2y(x^2-1) \end{pmatrix}$



Solution of 7.4:

(a) Wahr, das ist Teil der Aussage des Umkehrfunktionssatzes.

(b) Falsch, global könnte F nicht injektiv sein. Nehmen Sie zum Beispiel die komplexe Exponentialfunktion, die in Polarkoordinaten durch $(r, \theta) \mapsto (e^r \sin(\theta), e^r \cos(\theta))$ gegeben ist, mit $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

(c) Nein. Da V kompakt ist und ϕ^{-1} stetig ist, muss $\phi^{-1}(V) = U$ kompakt und damit als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen sein. Aber U ist auch offen in $\mathbb{R}^n$, also ist U clopen in $\mathbb{R}^n$, das zusammenhängend ist, Widerspruch.

(d) Nein, die Anzahl der Eckpunkte muss erhalten bleiben und $3 \neq 4$. Um die Tatsache zu beweisen, dass die Anzahl der Ecken durch einen Diffeomorphismus erhalten bleiben muss, können wir das Dreieck T als das Bild eines geschlossenen Pfades γ modellieren, d.h. als eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, sodass $\gamma(0) = \gamma(1)$. Diese Abbildung γ ist auch an allen Punkten außer den drei Punkten $A, B, C \in [0,1]$ differenzierbar, an denen die Ableitung $\gamma'(x)$ einen Sprungunstetigkeit aufweist. Wir können die Wahl von γ so treffen, dass $\gamma'(x) \neq 0$ an allen Differenzierbarkeitspunkten ist. Die Punkte $\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C)$ entsprechen genau den drei Eckpunkten des Dreiecks T in $\mathbb{R}^2$, und sie sind die Ecken der Figur.
Nehmen Sie nun, durch Widerspruch, an, dass $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus ist, sodass $\phi(T) = Q$, dann können wir das Quadrat Q als das Bild des geschlossenen Pfades $\phi \circ \gamma$ ausdrücken. Wir können dann die Ableitung $(\phi \circ \gamma)'(x)$ mithilfe der Kettenregel berechnen:

$$(\phi \circ \gamma)'(x) = D\phi(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma'(x) = [D\phi(\gamma(x))]^{-1} \cdot (\phi \circ \gamma)'(x)$$

Durch die Invertierbarkeit von $D\phi$ aufgrund der Eigenschaft des Diffeomorphismus haben wir explizit eine $1-1$-Korrespondenz zwischen den Punkten der Differenzierbarkeit von γ und den Punkten der Differenzierbarkeit von $\phi \circ \gamma$, daher haben wir

auch eine $1-1$-Korrespondenz zwischen den entsprechenden Punkten der Nichtdifferenzierbarkeit der beiden Kurven.
Es muss also ein $\bar{x} \in [0,1]$ geben, sodass γ an $\bar{x}$ differenzierbar ist, $\gamma'(\bar{x}) \neq 0$ und $\phi(\gamma(\bar{x}))$ eine der Ecken von Q ist (sagen wir die obere rechte Ecke). Der Widerspruch besteht darin, dass die Funktionen

$$e_1 \cdot (\phi \circ \gamma)(x), \quad e_2 \cdot (\phi \circ \gamma)(x)$$

beide ein lokales Maximum bei $\bar{x}$ haben, also $(\phi \circ \gamma)'(\bar{x}) = 0$, also der Widerspruch

$$0 \neq \gamma'(\bar{x}) = [D\phi(\gamma(\bar{x}))]^{-1} \cdot \underbrace{(\phi \circ \gamma)'(\bar{x})}_{=0} = 0.$$

Solution of 7.5: Wir schreiben das gegebene Gleichungssystem als $F(x,y,z,u,v) = 0$ für die Funktion $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y,z,u,v) = \begin{pmatrix} xy^5 + yu^5 + zv^5 - 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v - 1 \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung ist

$$D_{(x,y,z,v,u)}F = \begin{pmatrix} y^5 & 4xy^4 + u^5 & v^5 & 5yu^4 & 5zv^4 \\ 5x^4y & x^5 + 5y^4u & 5z^4v & y^5 & z^5 \end{pmatrix}$$

und damit

$$D_{(0,1,1,1,0)}F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gemäss dem Satz zur impliziten Funktion angewendet auf $(0,1,1,1,0)$ müssen wir überprüfen, dass die Teilmatrix des Differentials DF bestehend aus den partiellen Ableitungen nach u und v invertierbar ist. In der Tat, die fragliche Teilmatrix ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit Determinante $5 \neq 0$.) Nach dem Satz zur impliziten Funktion gilt also für die lokal definierte Funktion $G(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z))$

$$D_{(0,1,1)}G = -\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 24 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also $D_{(0,1,1)}u = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $D_{(0,1,1)}v = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 24 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution of 7.6:

1. • Wenn wir $\theta_0 \in (0,\pi)$, $\varphi_0 \in (-\pi,\pi)$ fixieren, definiert $p_0 = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ ein Punkt auf der Sphäre. Das Bild von $r \mapsto \Phi(r,\theta_0,\varphi_0)$ sind die Punkte rp_0 mit $r \in (0,\infty)$, ein radialer Strahl.

- Wenn wir $r_0 \in (0, \infty)$, $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$ fixieren, ist das Bild von $\theta \mapsto \Phi(r_0, \theta, \varphi_0)$ ein Halbbogen auf der Sphäre mit Radius r_0, welcher vom Nordpol bis zum Südpol geht mit Längengrad φ_0 (ohne Nord und Südpol). Negative φ_0 werden manchmal anstatt durch ein negatives Vorzeichen durch *West*, ein positives Vorzeichen wird mit *Ost* bezeichnet. In der Geographie verwendet man vermehrt Grad anstatt Radian für den Winkel.
(siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/L%C3%A4ngenkreis`)
- Wenn wir $r_0 \in (0, \infty)$, $\theta_0 \in (0, \pi)$ fixieren, ist das Bild von $\varphi \mapsto \Phi(r_0, \theta_0, \varphi)$ ein Breitenkreis auf der Sphäre mit Radius r_0 auf der Breite θ_0. In der Geographie wird die Breite als Wert in Grad in $(90°\text{Süd}, 90°\text{Nord})$ gemessen, welches in der Mathematik dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ entspricht. Weiter beachte, dass der Punkt auf der Datumsgrenze aber nicht im Bild enthalten ist.
(siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Breitenkreis`)

2. Das Bild ist für jedes r die Sphäre von Radius r ohne die Datumsgrenze. Total ist das Bild
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \leq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}).$$

3. Wir berechnen:
$$D_{(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$
und darum
$$\begin{aligned} D_{(r,\theta,\varphi)} &= r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi \\ &= r^2(\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta) = r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

4. Weil $r \in (0, \infty)$ ist und $\theta \in (0, \pi)$ ist $r^2 \sin\theta$ nie 0. Daher ist Φ ein lokaler Diffeomorphismus. Um zu zeigen, dass Φ ein globaler Diffeomorphismus auf sein Bild ist, müssen wir noch zeigen, dass Φ injektiv ist:
Falls $\Phi(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \Phi(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ ist folgt $r_1 = r_2$, wenn wir den Betrag berechnen. Weil $\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$ injekiv ist, folgt mit der 3-ten Koordinate, dass $\theta_1 = \theta_2$ gilt. Schliesslich finden wir auch $\varphi_1 = \varphi_2$, da $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi)$ einen eindeutigen Punkt auf dem Einheitskreis beschreibt.

Solution of 7.7:

1. Wir haben $D_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $\partial_y f(0, 0) = 0$. Darum ist der Satz bei $(0, 0)$ nicht anwendbar.
2. Sei $y \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass es ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $y^2(1 - x) - x^3 = 0$. Man bemerke, dass bei $x = 1$ die Gleichung $y^2(1 - x) - x^3 = 0$ nicht

erfüllt sein kann. Ausserdem folgt aus $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$, dass die rechte Seite ≥ 0 sein muss, da es ein Quadrat einer Zahl ist. Sei $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$x \mapsto \frac{x^3}{1-x}$$

Das Urbild von nicht-negativen Werten $y^2 \in [0, \infty)$ ist $x \in [0, 1)$. Wir müssen zeigen, dass die Zuordnung eindeutig ist. Also g auf $[0, 1)$ injektiv ist. Die Ableitung von g ist

$$g'(x) = \frac{(3-2x)x^2}{(1-x)^2},$$

also auf $x \in [0, 1)$ gilt immer $g'(x) > 0$ gilt, mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$. Zusammen mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung impliziert dies, dass g auf $[0, 1)$ streng monoton wachsend ist. Wegen $f(0) = 0$ und $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ ist $f : [0, 1) \to [0, \infty)$ also bijektiv.

3. Zuerst, wenn $x = \frac{1}{2}$ ist, dann

$$0 = \tfrac{1}{2}Y(\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{8}, \quad Y(\tfrac{1}{2}) > 0 \iff Y(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

Durch Differenzieren finden wir

$$0 = 2Y(x)Y'(x)(1-x) - Y(x)^2 - 3x^2 \iff 0 = 2x^3Y'(x) - Y(x)^3 - 3x^2Y(x).$$

Dies ergibt, wenn man bei $x = \frac{1}{2}$ auswertet und $Y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ verwendet,

$$\tfrac{1}{4}Y'(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} \iff Y'(\tfrac{1}{2}) = 1.$$

Erneutes Differenzieren ergibt

$$6x^2Y'(x) + 2x^3Y''(x) = 3Y(x)^2Y'(x) + 6xY(x) + 3x^2Y'(x)$$

Das ergibt, wenn man bei $x = \frac{1}{2}$ auswertet und $Y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, Y'(\frac{1}{2}) = 1$ verwendet,

$$\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4}Y''(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4} \iff Y''(\tfrac{1}{2}) = 6.$$