Problems marked with a (*) are a bit more complex and can be skipped at a first read.

If you don't have a lot of time focus on the Problems/subquestions marked with (♡).

8.1. BONUS PROBLEM. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Jordan-null Menge (wie in Definition 13.8).

(a) Zeige streng, dass $X \times X \subset \mathbb{R}^2$ auch Jordan-null ist.

(b) Zeige streng, dass $X \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ auch Jordan-null ist.

8.2. Richtig oder Falsch. (♡)

1. Eine beschränkte abzählbare Menge ist immer Jordan-null.
2. Eine abzählbare Menge ist immer Lebesgue-null.
3. Sei $D \subset [0,1]$ eine dichte Menge (d.h., $\overline{D} = [0,1]$). Dann ist $\mu_{out}(D) = 1$. (μ_{out} wurde in Definition 13.7 definiert).
4. Seien $X, Y \subset [0,1]$ Jordan-messbare Mengen, so dass $\mu(X) > 1/2$ und $\mu(Y) > 1/2$. Dann ist $X \cap Y \neq \emptyset$.
5. Seien $X, Y \subset [0,1]$ so, dass $\mu_{out}(X) > 1/2$ und $\mu_{out}(Y) > 1/2$. Dann ist $X \cap Y \neq \emptyset$.

8.3. Dicke Randmenge. Konstruiere eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$, für die der Rand ∂U keine Nullmenge ist.

8.4. Multiple Choice. (♡) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $N \subset U$ eine Jordannullmenge. In welchen der folgenden Fälle ist das Bild $f(N) \subset \mathbb{R}^m$ notwendigerweise eine Nullmenge? Achtung: Nur eine Antwort ist korrekt!

1. Wenn f gleichmäßig stetig ist.
2. Wenn f gleichmäßig stetig ist und $m \geq n$.
3. Wenn f lokal Lipschitz-stetig ist.
4. Wenn f lokal Lipschitz-stetig ist und $m \geq n$.

8.5. Änderung der Variablen und Jacobianer. (♡) Für jede der folgenden Bereiche und Variablenänderungen finden Sie den Jacobi-Multiplikator und den entsprechenden transformierten Bereich. Es ist nicht erforderlich, die Integrale tatsächlich zu berechnen!

1. $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 < x_1, 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ und $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$. Verwenden Sie die Formel für die Variablenänderung, um die Punkte in der folgenden Formel zu vervollständigen

$$\int_A x_1^2 \sin(x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\dots} \dots\, dr d\theta$$

2. $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$ und $u := xy, v := x^2$. Verwenden Sie die Formel für die Variablenänderung, um die Punkte in der folgenden Formel zu vervollständigen
$$\int_B y^2 e^{-xy} dxdy = \int_{...} ... \, dudv$$

3. $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 < z - 2y < 2, 0 < z < 1, -2 < 3x + y + z < 0\}$ und $u := z, v := z - 2y, w := 3x + y + z$. Verwenden Sie die Formel für die Variablenänderung, um die Punkte in der folgenden Formel zu vervollständigen
$$\int_C xyz \; dxdy = \int_{...} ... \, dudvdw.$$

8.6. Die Cantor-Menge. (*) Sei $X \subset [0,1]$ die Menge aller realen Zahlen, deren Dezimaldarstellung die Ziffer 8 nicht enthält.[1] Zeigen Sie:

1. X ist eine Lebesgue-Nullmenge,
2. X ist überabzählbar,
3. $X \times X \subset [0,1]^2$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.
4. Zeigen Sie, dass X kompakt ist (die im Fußnotentext getroffene Wahl ist wichtig!).

[1] Die Dezimaldarstellung ist nicht immer eindeutig. Zum Beispiel ist $0.8 = 0.79999\ldots$. Immer wenn x mindestens eine Dezimaldarstellung enthält, die 8 nicht enthält, entscheiden wir, dass x zu X gehört, also zum Beispiel $0.3257\overline{9} \in X$, $0.3258\overline{9} \in X$.

Hints:

8.2.5 μ_{out} kann positiv und groß auf sehr dünnen Mengen sein...

8.3 Versuchen Sie zu erreichen, dass U sehr kleines "‘Gesamtvolumen"’ hat, aber dennoch alle rationalen Zahlen in $[0, 1]$ enthält.