Problems marked with a (*) are a bit more complex and can be skipped at a first read.

If you don't have a lot of time focus on the Problems/subquestions marked with (♡).

8.1. BONUS PROBLEM. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Jordan-null Menge (wie in Definition 13.8).

(a) Zeige streng, dass $X \times X \subset \mathbb{R}^2$ auch Jordan-null ist.

(b) Zeige streng, dass $X \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ auch Jordan-null ist.

8.2. Richtig oder Falsch. (♡)

1. Eine beschränkte abzählbare Menge ist immer Jordan-null.
2. Eine abzählbare Menge ist immer Lebesgue-null.
3. Sei $D \subset [0,1]$ eine dichte Menge (d.h., $\overline{D} = [0,1]$). Dann ist $\mu_{out}(D) = 1$. (μ_{out} wurde in Definition 13.7 definiert).
4. Seien $X, Y \subset [0,1]$ Jordan-messbare Mengen, so dass $\mu(X) > 1/2$ und $\mu(Y) > 1/2$. Dann ist $X \cap Y \neq \emptyset$.
5. Seien $X, Y \subset [0,1]$ so, dass $\mu_{out}(X) > 1/2$ und $\mu_{out}(Y) > 1/2$. Dann ist $X \cap Y \neq \emptyset$.

8.3. Dicke Randmenge. Konstruiere eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$, für die der Rand ∂U keine Nullmenge ist.

8.4. Multiple Choice. (♡) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $N \subset U$ eine Jordannullmenge. In welchen der folgenden Fälle ist das Bild $f(N) \subset \mathbb{R}^m$ notwendigerweise eine Nullmenge? Achtung: Nur eine Antwort ist korrekt!

1. Wenn f gleichmäßig stetig ist.
2. Wenn f gleichmäßig stetig ist und $m \geq n$.
3. Wenn f lokal Lipschitz-stetig ist.
4. Wenn f lokal Lipschitz-stetig ist und $m \geq n$.

8.5. Änderung der Variablen und Jacobianer. (♡) Für jede der folgenden Bereiche und Variablenänderungen finden Sie den Jacobi-Multiplikator und den entsprechenden transformierten Bereich. Es ist nicht erforderlich, die Integrale tatsächlich zu berechnen!

1. $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 < x_1, 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ und $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$. Verwenden Sie die Formel für die Variablenänderung, um die Punkte in der folgenden Formel zu vervollständigen

$$\int_A x_1^2 \sin(x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\dots} \dots\, dr d\theta$$

2. $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$ und $u := xy, v := x^2$. Verwenden Sie die Formel für die Variablenänderung, um die Punkte in der folgenden Formel zu vervollständigen
$$\int_B y^2 e^{-xy} dxdy = \int_{...} ... \, dudv$$

3. $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 < z - 2y < 2, 0 < z < 1, -2 < 3x + y + z < 0\}$ und $u := z, v := z - 2y, w := 3x + y + z$. Verwenden Sie die Formel für die Variablenänderung, um die Punkte in der folgenden Formel zu vervollständigen
$$\int_C xyz \; dxdy = \int_{...} ... \, dudvdw.$$

8.6. Die Cantor-Menge. (*) Sei $X \subset [0,1]$ die Menge aller realen Zahlen, deren Dezimaldarstellung die Ziffer 8 nicht enthält.[1] Zeigen Sie:

1. X ist eine Lebesgue-Nullmenge,
2. X ist überabzählbar,
3. $X \times X \subset [0,1]^2$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.
4. Zeigen Sie, dass X kompakt ist (die im Fußnotentext getroffene Wahl ist wichtig!).

[1] Die Dezimaldarstellung ist nicht immer eindeutig. Zum Beispiel ist $0.8 = 0.79999\ldots$. Immer wenn x mindestens eine Dezimaldarstellung enthält, die 8 nicht enthält, entscheiden wir, dass x zu X gehört, also zum Beispiel $0.3257\overline{9} \in X$, $0.3258\overline{9} \in X$.

Hints:

8.2.5 μ_{out} kann positiv und groß auf sehr dünnen Mengen sein...

8.3 Versuchen Sie zu erreichen, dass U sehr kleines "‘Gesamtvolumen"’ hat, aber dennoch alle rationalen Zahlen in $[0, 1]$ enthält.

8. Solutions

Solution of 8.1: Für $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Sammlung von dyadischen Intervallen $\{I_1, \ldots, I_N\}$, sodass

$$X \subset I_1 \cup \ldots \cup I_N, \qquad \sum_{1 \leq 1 \leq N} \mu_1(I_i) \leq \epsilon.$$

Nun müssen wir haben

$$X \times [0,1] \subset I_1 \times [0,1] \cup \ldots \cup I_N \times [0,1],$$

und daher

$$\mu_{out}(X \times [0,1]) \leq \sum_{1 \leq i \leq N} \mu_2(I_i \times [0,1]) = \sum_{1 \leq 1 \leq N} \mu_1(I_i) \leq \epsilon.$$

Da ϵ beliebig war, ist $\mu_{out}(X \times [0,1]) = 0$. Da ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann, dass $X \subset [0,1]$, dann

$$\mu_{out}(X \times X) \leq \mu_{out}(X \times [0,1]) = 0.$$

Solution of 8.2:

1. Falsch, $\mathbb{Q}$ ist ein Gegenbeispiel.
2. Wahr, nummeriere seine Elemente $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und bedecke sie mit $\{a_k + \epsilon 2^{-k}[-1,1]\}_{k \in \mathbb{N}}$.
3. Wahr, wähle eine endliche dyadische Partition von $[0,1]$. Dann muss jedes Intervall mindestens ein Element von D enthalten, wegen der Dichte. Wenn wir also D abdecken wollen, müssen wir all diese Intervalle behalten, deren Längen sich zu 1 summieren.
4. Falsch, nehme $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ und $Y := (\sqrt{2} + \mathbb{Q}) \cap [0,1]$.

Solution of 8.3: Sei $0 < \epsilon < 1/2$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Wir definieren $I_n := (q_n - \epsilon 2^{-n}, q_n + \epsilon 2^{-n})$ und

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Nach Konstruktion gilt dann $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset U$ und das "‘Gesamtvolumen"’[2] ist klein, in dem Sinn, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_n) = 2\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2\epsilon. \tag{1}$$

Wir weisen nun nach, dass diese Menge U die Forderungen in der Aufgabenstellung erfüllt. Als Vereinigung von offenen Intervallen ist U sicherlich offen in $\mathbb{R}$. Als nächstes bemerken

[2] Wir schreiben dies stets in Anführungszeichen, da es genau der Punkt dieser Aufgabe ist, dass diese Menge U nicht Jordan-messbar ist.

wir, dass aufgrund von $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset U$ das gesamte Intervall $[0,1]$ im Abschluss $\overline{U}$ von U enthalten ist. Unter Verwendung des Randes von U kann dies geschrieben werden als

$$\partial U \cup U = (\overline{U} \setminus U) \cup U = \overline{U} \supset [0,1].$$

Angesichts von (1) ist es daher naheliegend zu vermuten, dass für eine Überdeckung von ∂U durch offene Quader $(Q_l)_l$ in $\mathbb{R}$ (also durch Intervalle) notwendigerweise

$$\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) \geq 1 - 2\epsilon \tag{2}$$

gelten muss. Zum Beweis dieser unteren Schranke bemerken wir als erstes, dass für eine solche Überdeckung des Randes

$$[0,1] \subset \partial U \cup U \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} Q_l$$

eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0,1]$ ist. Endlich viele dieser Mengen reichen daher zur Überdeckung aus; es gibt also $N, L \in \mathbb{N}$ mit

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{N} I_n \cup \bigcup_{l=1}^{L} Q_l.$$

Sowohl die I_n als auch die Q_l sind hierbei offene Intervalle, deren Volumen sich als Differenz des rechten und des linken Endpunkts berechnet. Elementare Überlegungen[3] zeigen, dass daher für die Volumina gilt, dass

$$1 \leq \sum_{n=1}^{N} \operatorname{vol}(I_n) + \sum_{l=1}^{L} \operatorname{vol}(Q_l).$$

Hieraus folgt unter Verwendung von (1) nun

$$\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) \geq \sum_{l=1}^{L} \operatorname{vol}(Q_l) \geq 1 - \sum_{n=1}^{N} \operatorname{vol}(I_n) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_n) = 1 - 2\epsilon,$$

also genau (2). Da ϵ so gewählt wurde, dass $1 - 2\epsilon > 0$ gilt, zeigt dies, dass ∂U keine Nullmenge sein kann.

Solution of 8.4: Die einzige richtige ist Nummer 4, was Lemma 13.6 entspricht.

Solution of 8.5:

[3] Wird ein Intervall $[a,b]$ überdeckt von endlich vielen Intervallen $J_1, \ldots, J_r$, geordnet aufsteigend nach den linken Endpunkten, so ist der rechte Endpunkt von J_k höchstens $a + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{vol}(J_j)$. Damit auch der rechte Endpunkt b in einem der Intervalle J_j liegen kann, muss also $\sum_{j=1}^{r} \operatorname{vol}(J_j) \geq b - a$ gelten.

1. Wenn $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$ dann haben wir

$$(x_1, x_2) \in A \iff (r, \theta) \in \{-\pi < \theta < \pi, \sin\theta < \cos\theta, 1 < r < 4\}$$

Lösen der Ungleichung

$$-\pi < \theta < \pi, \sin\theta < \cos\theta \iff -\pi < \theta < \pi/4.$$

Also, unter Berücksichtigung dass der Jacobian r ist, finden wir

$$\int_A x_1^2 \sin(x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_1^4 \Big\{ \int_{-\pi}^{\pi/4} \cos^2\theta \sin(r\sin\theta) d\theta \Big\} r^3 dr.$$

2. Beachten Sie, dass $B \subset (0,\infty)^2$ ist, also sind (x, y) immer positiv und auch (u, v). Wir schreiben die inversen Abbildungen

$$x = \sqrt{v}, \quad y = \frac{u}{\sqrt{v}}.$$

Also berechnen wir die Determinante von

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{\sqrt{v}} & * \end{bmatrix}$$

und so finden wir

$$dx\, dy = \frac{du\, dv}{2v}.$$

Die Menge B ändert sich zu

$$\begin{aligned}(x, y) \in B &\iff (u, v) \in \{1 < u < 2, v\sqrt{v} < u < 2v\sqrt{v}\}, \\ &\iff (u, v) \in \{1 < u < 2, u^{2/3} < v < 2^{-2/3}u^{2/3}\},\end{aligned}$$

und der Integrand $y^2 e^{-xy}$ ändert sich zu

$$\frac{u^2}{v} e^u$$

also summiert finden wir

$$\int_B y^2 e^{-xy} dxdy = \int_1^2 u^2 \Big\{ \int_{u^{2/3}}^{2^{-2/3}u^{2/3}} v^{-2} e^v\, dv \Big\}\, du.$$

3. Wir berechnen die Determinante

$$\det \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 6,$$

also $dx\, dy\, dz = \frac{1}{6}\, du\, dv\, dw$. Und die Menge wird zu

$$(x, y, z) \in C \iff 0 < u < 1, \quad 1 < v < 2, \quad -2 < w < 0.$$

Um die Variablen in der Funktion zu ändern, müssen wir die inverse Abbildung berechnen:

$$x = \tfrac{1}{3}w + \tfrac{1}{6}v - \tfrac{1}{2}u, \quad y = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}v, \quad z = u.$$

So finden wir

$$xyz = -\tfrac{1}{6}uvw + \tfrac{1}{6}u^2w + \tfrac{1}{3}u^2v - \tfrac{1}{12}uv^2 - \tfrac{1}{4}u^3.$$

So alles zusammenzählen ergibt

$$\int_C xyz\, dx\, dy\, dz = v\frac{1}{72}\int_0^1\int_1^2\int_{-2}^0 (-2uvw + 2u^2w + 4u^2v - uv^2 - 3u^3) du\, dv\, dw.$$

Solution of 8.6:

1. Sei A_n die Menge, welche bis zur n-ten Nachkommastelle keine 8 enthält. Also zum Beispiel

   $$A_1 = [0, 0.8] \cup [0.9, 1].$$

   Die Intervalle, welche A_1 zerlegen, haben totales Volumen 0.9. Die zweite Menge hat Form

   $$A_2 = [0, 0.08] \cup [0.09, 0.18] \cup \cdots \cup [0.69, 0.78] \cup [0.79, 0.8] \cup [0.9, 0.98] \cup [0.99, 1].$$

   Die Intervalle, welche A_2 zerlegen, haben totales Volumen $9 \cdot 0.09 = 0.81$ (es gibt total 11 Intervalle: 7 haben Länge 0.09; und 4 Intervalle sind kürzer, man findet aber 2 Mal 2 Intervalle, welche zusammen auch Länge 0.09 haben). Wir versuchen ein Muster zu finden und betrachten A_3. Behandeln wir die 4 kürzeren Intervalle in A_2 als wie wenn wir 2 Intervalle von Länge 0.09 hätten, sehen wir dass jedes der Intervalle in A_2 in 9 Intervalle der Länge 0.009 dividiert wird (wieder mit zusammennehmen von kürzeren Intervallen). Wir haben also $\mathrm{vol}(A_3) = 0.009 \cdot 81 = 0.9^3$.

   Analog findet man, dass A_n aus endlich vielen Intervallen besteht welches totales Volumen

   $$\mathrm{vol}(A_n) = 0.9\mathrm{vol}(A_{n-1})$$

   hat, woraus wir schliessen, dass $\mathrm{vol}(A_n) = 0.9^n$ gilt.

   Um zu zeigen, dass X eine Lebesgue-Nullmenge ist, sei $\epsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ gross genug, dass $0.9^n < \epsilon$ ist. Da A_n aus endlich vielen Intervallen besteht, welche X überdecken und die Summe der Längen der einzelnen Invervalle $0.9^n < \epsilon$ ist, folgt die Behauptung. Als Ergänzung für die, welche explizite Formeln mögen: Seien $(I_n^k)_{k=1}^{s_n}$ die Intervalle, welche A_n definieren. Dann gilt

   $$X \subset A_n = \bigcup_{k=1}^{s_n} I_n^k \text{ und } \sum_{k=1}^{s_n} \mathrm{vol}(I_n) = 0.9^n < \epsilon.$$

2. Falls X abzählbar wäre, schreiben wir alle Zahlen in einer abzählbar unendliche Liste. Wie im Cantor-Diagonalargument nehmen wir eine Zahl definiert durch die Diagonale und ändern jede Ziffer zu einer Ziffer, welche immer noch keine 8 ist. Diese Zahl ist immer noch in X, stimmt aber mit keiner Zahl in unserer Liste überein. Widerspruch! Also ist X überabzählbar.

3. Wir können $X \times X$ durch die Quader in $A_n \times [0,1]$ überdecken. Wir haben $\mathrm{vol}(A_n \times [0,1]) = \mathrm{vol}(A_n) = 0.9^n$ und das Argument ist analog zu Teilaufgabe (a).

4. Jedes der A_i aus Schritt 1 ist kompakt, da es die Vereinigung von endlich vielen geschlossenen disjunkten Intervallen in $[0,1]$ ist. Unser Satz ist per Definition

$$X := \bigcup_{i \geq 1} A_i,$$

was abgeschlossen ist (da es ein Schnitt von abgeschlossenen Mengen ist) und beschränkt ist (da A_1 beschränkt ist). Daher ist X kompakt.