9.1. BONUS PROBLEM. Berechnen Sie das Volumen des Bereichs $B \subset \mathbb{R}^3$, der von den Oberflächen $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ und $2z = x^2 + y^2$ umschlossen ist. Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.

9.2. Multiple Integrals.

1. Sei $D = [0, 2] \times [0, 1]$. Berechnen Sie
$$\iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3)\, dxdy.$$

2. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, \pi)$ und (π, π). Berechnen Sie
$$\iint_D x \cos(x + y)\, dxdy.$$

3. Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 1, y > 1, x + y < 3\}$. Berechnen Sie
$$\iint_D \frac{1}{(x + y)^3}\, dxdy.$$

9.3. Fubini Satz. Berechnen Sie die Integrale
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\ dydx, \qquad \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x + y)^2\ dxdy,$$

9.4. Gegenbeispiel zu Fubini. Sei $f\colon [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$f(x) = \begin{cases} e^{y-x} & x > y \geq 0, \\ -e^{x-y}, & 0 \leq x \leq y, \end{cases}$$

Berechnen Sie die iterierten Integrale:
$$\int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty f(x, y)\, dx \Big\}\, dy, \qquad \int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty f(x, y)\, dy \Big\}\, dx,$$

und zeigen Sie, dass sie verschiedene Werte haben. Erklären Sie, warum dies dem Fubini-Satz nicht widerspricht.

9.5. Volumen des Kegels über einer Menge. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte messbare Menge, $n \geq 1$. Betrachten Sie den „Kegel über Ω“
$$C\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1, x \in (1 - t)\Omega\}.$$

Verwenden Sie den Fubini-Satz und die Homogenität von μ_n, um zu zeigen, dass

$$\mu_{n+1}(C\Omega) = \frac{\mu_n(\Omega)}{n+1}.$$

Verwenden Sie dieses Ergebnis, um das n-Volumen des n-Simplexes zu berechnen:

$$\mu_n(T_n) := \mu_n\Big(\{a_1e_1 + \ldots + a_ne_n : 0 \leq a_i \leq 1, a_1 + \ldots + a_n \leq 1\}\Big) = \frac{1}{n!},$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ einen ortonormalen Rahmen von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Hinweis: Zeigen Sie $(n+1)T_{n+1} = T_n$.

9.6. Gaußsche Integrale. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\, dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}},$$

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Fall, in dem A eine Diagonalmatrix ist, und verwenden Sie dann den Spektralsatz für den allgemeinen Fall. Sie können auch verwenden, dass $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$.

9.7. Schichtkuchenformel. (*) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion, die identisch außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, und sei $p \geq 1$. Verwenden Sie den Satz von Fubini, um die Schichtkuchenformel zu zeigen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^p\, dx = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})\, dt.$$

Finden Sie eine ähnliche Formel für das Integral von

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(f(x))\, dx = \int_0^\infty \quad \ldots \quad \mu_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})\, dt.$$

wobei $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ eine Funktion ist, sodass $\Phi(0) = 0$. Hinweis: $f(x) = \int_0^{f(x)}\, dt$.