9.1. BONUS PROBLEM. Berechnen Sie das Volumen des Bereichs $B \subset \mathbb{R}^3$, der von den Oberflächen $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ und $2z = x^2 + y^2$ umschlossen ist. Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.

9.2. Multiple Integrals.

1. Sei $D = [0, 2] \times [0, 1]$. Berechnen Sie
$$\iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^3)\, dxdy.$$

2. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, \pi)$ und (π, π). Berechnen Sie
$$\iint_D x \cos(x + y)\, dxdy.$$

3. Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 1, y > 1, x + y < 3\}$. Berechnen Sie
$$\iint_D \frac{1}{(x + y)^3}\, dxdy.$$

9.3. Fubini Satz. Berechnen Sie die Integrale
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\ dydx, \qquad \int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{1} (x + y)^2\ dxdy,$$

9.4. Gegenbeispiel zu Fubini. Sei $f\colon [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$f(x) = \begin{cases} e^{y-x} & x > y \geq 0, \\ -e^{x-y}, & 0 \leq x \leq y, \end{cases}$$

Berechnen Sie die iterierten Integrale:
$$\int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty f(x, y)\, dx \Big\}\, dy, \qquad \int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty f(x, y)\, dy \Big\}\, dx,$$

und zeigen Sie, dass sie verschiedene Werte haben. Erklären Sie, warum dies dem Fubini-Satz nicht widerspricht.

9.5. Volumen des Kegels über einer Menge. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte messbare Menge, $n \geq 1$. Betrachten Sie den „Kegel über Ω“
$$C\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1, x \in (1 - t)\Omega\}.$$

Verwenden Sie den Fubini-Satz und die Homogenität von μ_n, um zu zeigen, dass

$$\mu_{n+1}(C\Omega) = \frac{\mu_n(\Omega)}{n+1}.$$

Verwenden Sie dieses Ergebnis, um das n-Volumen des n-Simplexes zu berechnen:

$$\mu_n(T_n) := \mu_n\Big(\{a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n : 0 \leq a_i \leq 1, a_1 + \ldots + a_n \leq 1\}\Big) = \frac{1}{n!},$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ einen ortonormalen Rahmen von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Hinweis: Zeigen Sie $(n+1)T_{n+1} = T_n$.

9.6. Gaußsche Integrale. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle}\, dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}},$$

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Fall, in dem A eine Diagonalmatrix ist, und verwenden Sie dann den Spektralsatz für den allgemeinen Fall. Sie können auch verwenden, dass $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$.

9.7. Schichtkuchenformel. (*) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion, die identisch außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, und sei $p \geq 1$. Verwenden Sie den Satz von Fubini, um die Schichtkuchenformel zu zeigen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^p\, dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})\, dt.$$

Finden Sie eine ähnliche Formel für das Integral von

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(f(x))\, dx = \int_0^\infty \quad \ldots \quad \mu_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})\, dt.$$

wobei $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ eine Funktion ist, sodass $\Phi(0) = 0$. Hinweis: $f(x) = \int_0^{f(x)} dt$.

9. Solutions

Solution of 9.1: Sei $B := \{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2 \leq 8, x^2+y^2-2z \leq 0\}$. Wir berechnen

$$\mathrm{vol}(B) = \int_B d\mathrm{vol}$$

Wir verwenden Zylinderkoordinaten. Mit $\rho = r^2$ (so dass $d\rho = 2rdr$), gilt:

$$\mathrm{vol}(B) = \int_B r\ drdzd\phi = \frac{1}{2}\int_{\left\{\frac{1}{2}\rho<z<\sqrt{8-\rho}\right\}} d\rho dz d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \sqrt{8-\rho} - \frac{1}{2}\rho\ d\rho d\phi = \frac{4}{3}(8\sqrt{2}-7)\pi$$

Solution of 9.2:

1. Wir verwenden den Satz von Fubini:
$$\begin{aligned}\int_D (x^3+3x^2y+y^3)\,\mathrm{dvol}(x,y) &= \int_0^2\int_0^1 (x^3+3x^2y+y^3)\,dy\,dx \\ &= \int_0^2 \left(x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)dx = \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

2. Wir haben $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0<x<\pi, x<y<\pi\}$ und mit dem Satz von Fubini erhalten wir:
$$\begin{aligned}\int_D x\cos(x+y)\,\mathrm{dvol}(x,y) &= \int_0^\pi\int_x^\pi x\cos(x+y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^\pi [x\sin(x+y)]_{y=x}^\pi\,dx \\ &= -\int_0^\pi x(\sin x+\sin(2x))\,dx \\ &= \left[x(\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x))\right]_0^\pi - \int_0^\pi (\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x))\,dx \\ &= -\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$
wobei wir Integration durch Teile verwendet haben.

3. Wir haben $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 1<x<2, 1<y<3-x\}$ und mit dem Satz von Fubini erhalten wir:
$$\begin{aligned}\int_D \frac{1}{(x+y)^3}\,\mathrm{dvol}(x,y) &= \int_1^2\int_1^{3-x}\frac{1}{(x+y)^3}\,dy\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^2\left[\frac{1}{(x+y)^2}\right]_{y=1}^{3-x}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx \\ &= -\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{36}\end{aligned}$$

Solution of 9.3: Da das unbestimmte Integral von $\sin(y^2)$ schwer zu berechnen ist, verwenden wir den Fubini-Satz, um die Integrale zu vertauschen (ein ähnlicher Trick wurde in Beispiel 13.42 verwendet)

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\ dydx &= \int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{y} \sin(y^2)\ dxdy\\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} y\sin(y^2)\ dy = -\frac{1}{2}\cos(y^2)|_0^{\sqrt{\pi}} = 1.\end{aligned}$$

Ähnlich:

$$\int_{-1}^1\int_{|y|}^1 (x+y)^2\ dxdy = \int_0^1\int_{-x}^x (x+y)^2\ dydx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^3\ dx = \frac{2}{3}.$$

Solution of 9.4: Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\ dxdy &= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{y-x}\ dx + \int_0^y -e^{x-y}\ dx\right)\ dy =\\ &= \int_0^\infty \left(1-1+e^{-y}\right)\ dy = \int_0^\infty e^{-y}\ dy = 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\ dydx &= \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{y-x}\ dx + \int_x^\infty -e^{x-y}\ dy\right)\ dx =\\ &= \int_0^\infty \left(1-e^{-x}-1\right)\ dx = \int_0^\infty -e^{-x}\ dx = -1\end{aligned}$$

Solution of 9.5: Da $\Omega \subset [-C,C]^n$ ist, ist auch $C\Omega$ beschränkt:

$$(x,t)\in C\Omega \implies 0\le t\le 1, x\in[-C,C]^n.$$

Wir schreiben unsere Menge mithilfe von Indikatorfunktionen und versuchen, sie als Produkt zu schreiben

$$\mathbf{1}_{C\Omega}(x,t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)\cdot\mathbf{1}_{(1-t)\Omega}(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)\cdot\mathbf{1}_{\Omega}(x/(1-t)),$$

wir verwenden diese Faktorisierung, um den Fubini-Satz und die Variablentransformation $x=(1-t)y$ anzuwenden,

$$\begin{aligned}\mu_{n+1}(C\Omega) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbf{1}_{C\Omega}\,dxdt = \int_{\mathbb{R}}\Big\{\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\cdot\mathbf{1}_{\Omega}(x/(1-t))dx\Big\}dt\\ &= \int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{[0,1]}(t)(1-t)^n\Big\{\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{\Omega}(y)dy\Big\}dt\\ &= \mu_n(\Omega)\int_0^1(1-t)^n dt = \mu_n(\Omega)\int_0^1 s^n ds = \frac{\mu_n(\Omega)}{n+1}.\end{aligned}$$

Klarerweise ist $T_1 = [0,1] \subset \mathbb{R}$ und $\mu_1(T_1) = 1$. Wir behaupten, dass

$$T_{n+1} = CT_n,$$

woraus die Formel rekursiv folgt:

$$\mu_{n+1}(T_{n+1}) = \mu_{n+1}(CT_n) = \frac{\mu_n(T_n)}{n+1} = \frac{\mu_n(CT_{n-1})}{n+1} = \frac{\mu_{n-1}(T_{n-1})}{(n+1)n} = \ldots = \frac{\mu_1(T_1)}{(n+1)!}.$$

Wir überprüfen die Behauptung: Seien $0 \leq a_i \leq 1$ für $i = 1, \ldots, n+1$ und $x = a_1 e_1 + \ldots + a_{n+1} e_{n+1}$, dann gilt

$$\begin{aligned} x \in T_{n+1} \iff a_1 + \ldots + a_{n+1} \leq 1 &\iff \frac{a_1 + \ldots + a_n}{1 - a_{n+1}} \leq 1 \\ &\iff \frac{a_1}{1-a_{n+1}} e_1 + \ldots + \frac{a_n}{1-a_{n+1}} e_n \in T_n \\ &\iff (a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n, a_{n+1}) \in CT_n \iff x \in CT_n. \end{aligned}$$

Solution of 9.6: Gemäß dem Spektralsatz können wir A als $A = KDK^{-1}$ für eine orthogonale Matrix $K \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix schreiben als

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$$

mit $\lambda_i > 0$ für $1 \leq i \leq n$. Aufgrund von $K^t = K^{-1}$ und $|\det(K)| = 1$ folgt aus der Substitutionsregel

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} \mathrm{dvol}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle DK^{-1}x, K^{-1}x\rangle} \mathrm{dvol}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Dx,x\rangle} \mathrm{dvol}(x), \tag{1}$$

vorausgesetzt, einer dieser unbestimmten Integrale existiert. Sei $(B_m)_m$ die Erschöpfung von $\mathbb{R}^n$, die aus den abgeschlossenen Würfeln $B_m = [-m,m]^n \subset \mathbb{R}^n$ besteht. Dann ist $x \mapsto e^{-\langle Dx,x\rangle}$ Riemann-integrierbar als stetige Funktion über jeden der Mengen B_m, und nach dem Satz von Fubini haben wir

$$\int_{B_m} e^{-\langle Dx,x\rangle} \mathrm{dvol}(x) = \int_{B_m} e^{-\lambda_1 x_1^2 - \cdots - \lambda_n x_n^2} \mathrm{dvol}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n \int_{-m}^m e^{-\lambda_i x^2} \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Durch die Substitution $u = \sqrt{\lambda_i} x$ finden wir für die letzteren Integrale unter Berücksichtigung von Beispiel 13.69

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-m}^m e^{-\lambda_i x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \lim_{m\to\infty} \int_{-\sqrt{\lambda_i} m}^{\sqrt{\lambda_i} m} e^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Da $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(D) = \det(A)$, folgt aus (2), dass

$$\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} e^{-\langle Dx,x\rangle} \mathrm{dvol}(x) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Satz 13.74 besagt nun, dass $x \mapsto e^{-\langle Dx,x\rangle}$ über $\mathbb{R}^n$ unbestimmt integrierbar ist, und zusammen mit (1) folgern wir das gewünschte Ergebnis

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\mathrm{dvol}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Dx,x\rangle}\mathrm{dvol}(x) &= \lim_{m\to\infty}\int_{B_m} e^{-\langle Dx,x\rangle}\mathrm{dvol}(x)\\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.\end{aligned}$$

Solution of 9.7: Wir beweisen direkt den allgemeinen Fall, beachten dass:

$$\Phi(f(x)) = \int_0^{f(x)} \Phi'(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,f(x)]}(t)\Phi'(t)\,dt, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir integrieren diese Identität über $\mathbb{R}^n$ und verwenden Fubini, um dazu den Definitionsbereich umzustellen und festzustellen, dass

$$\mathbf{1}_{[0,f(x)]}(t) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)\cdot\mathbf{1}_{[0,\infty)}(f(x)-t) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)\cdot\mathbf{1}_{[t,\infty)}(f(x))$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(f(x))\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{[0,f(x)]}(t)\Phi'(t)\,dt\Big\}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)\cdot\mathbf{1}_{[t,\infty)}(f(x))\Phi'(t)\,dt\Big\}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\Big\{\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)\cdot\mathbf{1}_{[t,\infty)}(f(x))\Phi'(t)\,dx\Big\}\,dt\\ &= \int_0^\infty \Phi'(t)\Big\{\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{[t,\infty)}(f(x))dx\Big\}\,dt\\ &= \int_0^\infty \Phi'(t)\,\mu_n(\{f(x)\geq t\})\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Die erste Formel folgt durch Setzen von $\Phi(t) := t^p$.