TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 10

(1) Sei $B = \{1/n \mid n \geq 1\} \subset \mathbf{R}$. Definieren Sie eine Topologie $\mathscr{T}^*$ auf $\mathbf{R}$ mit Basis $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$, wobei

$$\mathscr{B}_1 = \{]a, b[\mid a < b \text{ in } \mathbf{R}\}$$
$$\mathscr{B}_2 = \{]a, b[\setminus B \mid a < b \text{ in } \mathbf{R}\}$$

d.h. eine Menge $U \subset \mathbf{R}$ ist offen in $\mathscr{T}^*$ genau dann wenn sie eine beliebige Vereinigung von Mengen in $\mathscr{B}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{T}^*$ tatsächlich eine Topologie ist, und dass $\mathbf{R}$ mit dieser Topologie Hausdorff ist.
(b) Sei $A = \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Mengen A und B in $(\mathbf{R}, \mathscr{T}^*)$ abgeschlossen sind.

Wir nehmen nun an, dass U und V offene Mengen sind mit $0 \in U$, $B \subset V$, und dass $U \cap V = \emptyset$.

(c) Zeigen Sie, dass es $a < b$ gibt, so dass $a < 0 < b$ und $]a, b[\setminus B \subset U$.
(d) Zeigen Sie, dass es eine ganze Zahl $n \geq 1$ so gibt, dass $1/n \in\ ]a, b[$.
(e) Zeigen Sie, dass $1/n \in V$ und dass es $c < 1/n < d$ gibt, so dass $]c, d[\subset V$.
(f) Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbf{R}$ so gibt, dass

$$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, \qquad x > c.$$

(g) Zeigen Sie, dass $x \in U$ und dass $x \in V$.
(h) Leiten Sie her, dass $(\mathbf{R}, \mathscr{T}^*)$ nicht normal ist. (In der Tat, ist der Raum nicht einmal *regulär*, wobei ein Raum regulär genannt wird, wenn er Hausdorff ist und für jede $x \in X$ und $B \subset X$, die abgeschlossen ist und x nicht enthält, gibt es disjunkte offene Mengen U und V mit $x \in U$ und $B \subset V$.)

(2) Sei X ein normaler topologischer Raum. Sei

$$\mathscr{F} = \{f : X \to [0, 1] \mid f \text{ ist stetig}\}.$$

Für $f \in \mathscr{F}$ sei $X_f = [0, 1]$, und sei

$$\varphi : X \to \prod_{f \in \mathscr{F}} X_f$$

die Abbildung sein, die durch

$$\varphi(x) = (f(x))_{f \in \mathscr{F}}.$$

Wir setzen $Y = \varphi(X)$.

(a) Zeigen Sie, dass φ injektiv ist.
(b) Zeigen Sie, dass φ stetig ist, wenn der Produktraum die Produkttopologie hat.

(c) Sei $y = \varphi(x)$ ein Element von Y. Zeigen Sie, dass ein Umgebungsbasis von y in Y gegeben ist durch die Mengen

$$\{\varphi(z) \mid z \in X \text{ erfüllt } |f_j(z) - f_j(x)| < \varepsilon_j \text{ für alle } j \in J\},$$

wobei $f_j \in \mathscr{F}$ für alle $j \in J$, J über endliche Mengen variiert und ε_j über positive reelle Zahlen variiert für alle $j \in J$.

(d) Sei U offen in X und sei $x_0 \in U$. Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung V von x_0 und eine Funktion $g \in \mathscr{F}$ existieren, so dass $V \subset \overline{V} \subset U$, und

$$\{z \in X \mid g(z) > 1/2\} \subset U.$$

(e) Leiten Sie her, dass die Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus ist. (Tipp: Zeigen Sie anhand der vorherigen Fragen, dass das Bild von φ einer offenen Menge in X offen in Y ist.)

(f) Leiten Sie her, dass X homöomorph zu einem Unterraum eines kompakten Raumes ist.

(3) Sei X ein normaler topologischer Raum. Für eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbf{C}$ definieren wir die *Träger* von f, bezeichnet als $\mathrm{Supp}(f)$, wie folgt

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{f^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\})}$$

(der Abschluss der Menge von x, in der $f(x) \neq 0$ ist).

Sei $(U_i)_{1\leq i\leq k}$ eine endliche Familie von offenen Teilmengen von X, deren Vereinigung X ist. Eine *Zerlegung der Eins*, bezüglich dieser Überdeckung, ist eine endliche Familie $(f_i)_{1\leq i\leq k}$ von stetigen Funktionen $f_i\colon X \to [0,1]$, so dass

- Es gilt $\mathrm{Supp}(f_i) \subset U_i$ für alle i.
- Es gilt

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x) = 1$$

für alle $x$in X.

Das Ziel der Übung ist zu zeigen, dass es immer eine solche Zerlegung der Eins gibt.

(a) Zeigen Sie, dass bei einer endlichen offenen Überdeckung $(U_i)_{1\leq i\leq k}$, wir offene Mengen $V_i \subset U_i$, $1 \leq i \leq k$ finden können, mit $\overline{V}_i \subset U_i$, so dass $(V_i)_{1\leq i\leq k}$ eine Überdeckung ist (Tipp: Zeigen Sie durch Induktion auf $j \leq k$, dass es V_i, für $i \leq j$ gibt, mit $\overline{V}_i \subset U_i$, so dass $(V_1, \ldots, V_j, U_{j+1}, \ldots, U_k)$ X überdecken.)

(b) Zeigen Sie, dass es Überdeckungen $(W_i)_{1\leq i\leq k}$ und $(V_i)_{1\leq i\leq k}$ und Funktionen $g_i\colon X \to [0,1]$ gibt, die folgendes erfüllen:

$$\overline{W}_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i,$$

und

$$g_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in W_i, \\ 0 & \text{wenn } x \in X \setminus V_i. \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Supp}(g_i) \subset U_i$, und dass

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(x) > 0$$

für alle $x \in X$.

(d) Leiten Sie die Existenz einer Zerlegung der Eins bezüglich (U_i) her.

(4) Sei X eine kompakte Hausdorff topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 1$. Das Ziel dieser Übung ist es zu zeigen, dass es eine ganze Zahl $m \geq 1$ und eine kompakte Teilmenge $C \subset \mathbf{R}^m$ gibt, die zu X homöomorph ist.

(a) Zeigen Sie, dass es eine endliche offene Überdeckung $(U_i)_{1 \leq i \leq k}$ von X gibt, so dass für jedes i es ein Homöomorphismus $\varphi_i \colon U_i \to W_i$ gibt, wobei $W_i \subset \mathbf{R}^d$ offen ist.

(b) Erklären Sie, warum es eine Zerlegung der Eins $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ gibt, bezüglich (U_i) ist (wie in der vorherigen Übung). Zeigen Sie, dass die Funktionen $g_i \colon X \to \mathbf{R}^d$ gegeben durch

$$g_i(x) = \begin{cases} f_i(x)\varphi_i(x) & \text{wenn } x \in U_i, \\ 0 & \text{wenn } x \in X \setminus \mathrm{Supp}(f_i) \end{cases}$$

stetig sind (wobei die Träger von f_i auch in der vorherigen Übung definiert wurde).

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi \colon X \to \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{dk}$ gegeben durch

$$\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x), g_1(x), \ldots, g_k(x))$$

injektiv ist. (Tipp: Wenn $\varphi(x) = \varphi(y)$, zeigen Sie, dass es i so existiert, dass $x \in U_i$ und $y \in U_i$.)

(d) Zeigen Sie, dass φ stetig ist und dass es einen Homöomorphismus definiert

$$\varphi \colon X \to \varphi(X) \subset \mathbf{R}^{k+dk}.$$