TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 11

(1) Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für jedes x und y in X einen Pfad $\gamma\colon [0,1] \to X$ gibt, so dass $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

(a) Zeigen Sie, dass wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist es zusammenhängend.

(b) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$, die durch "$x \sim y \iff$ es in X einen Pfad von x nach y gibt" definiert ist, eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse einiger $x \in X$ für die Relation $\sim$ in der zusammenhangskomponente von x in X enthalten ist. Diese Äquivalenzklasse heißt die *wegzusammenhangskomponente* von x.

(d) Wir nehmen nun an, dass X eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, dass die wegzusammenhangskomponente eines beliebigen $x \in X$ offen ist.

(e) Sei X ein zusammenziehbarer (contractible) Raum. Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist. (Tipp: wenn Id_X homotop zur Konstanten x_0 ist, zeigen Sie zuerst, dass für alle x ein Pfad in X von x nach x_0 existiert).

(2) Sei X der Unterraum

$$C = \{(0,1)\} \cup \bigcup_{n\geq 1}(\{1/n\} \times [0,1]) \;\cup\; ([0,1] \times \{0\}) \subset \mathbf{R}^2,$$

mit der induzierten Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass C zusammenhängend ist. (Tipp: einzeichnen Sie C.)

(b) Sei $\gamma\colon [0,1] \to C$ ein Pfad mit $\gamma(0) = (0,1)$ und sei $Y = \gamma^{-1}(\{(0,1)\})$. Zeigen Sie, dass $Y \subset [0,1]$ abgeschlossen und nicht leer ist.

(c) Sei $t_0 \in Y$. Sei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl mit $\varepsilon < 1/2$ und sei

$$V = \{(x,y) \in C \mid |x| + |y-1| < \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen a, b mit $0 < a < t_0 < b < 1$ gibt, so dass $\gamma(]a,b[) \subset V$.

(d) Zeigen Sie, dass $\gamma(]a,b[) \subset V$ zusammenhängend ist.

(e) Leiten Sie ab, dass $\gamma(]a,b[) = \{(0,1)\}$. (Tipp: Beachten Sie zunächst, dass $\gamma(]a,b[)$ die reelle Achse nicht schneidet; zeigen Sie weiter, dass $\gamma(]a,b[)$ kein Element der Form $(1/n,u)$ für irgendeine $n \geq 1$ enthalten kann, indem Sie die vorherige Frage).

(f) Leiten Sie ab, dass Y in $[0,1]$ offen ist.

(g) Leiten Sie ab, dass C nicht wegzusammenhängend ist.

(3) Seien X und Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eine *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g$ homotop zu Id_Y und $g \circ f$ homotop zu Id_X ist. Falls es eine Homotopieäquivalenz von X zu Y gibt, so nennt man X und Y *vom gleichen Homotopietyp*.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation "X und Y vom gleichen Homotopietyp" eine Äquivalenzrelation auf topologischen Räumen ist.

(b) Wenn $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, zeigen Sie, dass die Homotopieklasse in $[Y, X]$ einer Abbildung $g\colon Y \to X$, so dass $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$ und $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$, eindeutig ist. Diese Klasse wird die *Homotopie-Inverse* von f genannt.

(c) Zeigen Sie, dass, wenn $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopie-Inverse g und $f'\colon Y \to Z$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopie-Inversen g' ist, dann ist $f' \circ f$ eine Homotopie-Äquivalenz mit Homotopie-Inversen $g \circ g'$.

(d) Zeigen Sie, dass X und ein Einpunktraum $\{x_0\}$ gleichen Homotopietyp haben, genau dann wenn X zusammenziehbarer ist.

(e) Zeigen Sie, dass wenn X und ein Einpunktraum gleichen Homotopietyp haben, dann für einen beliebigen Raum Y, jede stetige Abbildung $Y \to X$ homotop zu einer konstanten Karte ist, und jede stetige Abbildung $X \to Y$ homotop zu einer konstanten Karte ist.

(4) Ein Unterraum Y eines topologischen Raumes X heißt ein *Retrakt* von X, wenn es eine stetige Abbildung $r\colon X \to Y$ gibt, so dass $r(y) = y$ für alle $y \in Y$.

(a) Wenn Y ein Retrakt von X ist und $y_0 \in Y$, zeigen Sie, dass der Gruppenhomomomorphismus

$$\pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, y_0)$$

induziert durch den Inklusionkarte $Y \to X$, injektiv ist.

(b) Für $n \geq 1$, zeigen Sie, dass

$$\mathbf{S}_{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

ist ein Retrakt von $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht trivial ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbf{S}_1$ kein Retrakt von $\mathbf{R}^2$ ist. (Tipp: Zeigen Sie, dass dies impliziert, dass $\mathbf{S}_1$ zusammenziehbarer ist.)

(5) Sei $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$ die Einheitskreis in $\mathbf{C}$. Sei $f\colon D \to D$ eine stetige Abbildung. Wir nehmen an dass $f(z) \neq z$ für alle $z \in D$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine wohldefinierte Abbildung $g\colon D \to \mathbf{S}_1$ gibt, die z auf den Schnittpunkt der Linie zwischen z und $f(z)$ mit $\mathbf{S}_1$ bildet.

(b) Zeigen Sie, dass g stetig ist.

(c) Leiten Sie einen Widerspruch her und schließen Sie, dass es einen Fixpunkt von f geben muss. (Tipp: Verwenden Sie die vorherige Übung.)

Das Ergebnis dieser Übung ist der *Fixpunktsatz von Brouwer*, in der Dimension 2 (er gilt auch für die Einheitskugel in $\mathbf{R}^n$ für $n \geq 3$).