TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 12

(1) Sei $X \subset \mathbf{R}^2$ die Vereinigung der Kreise C_n mit Radius $1/n$ und Mittelpunkt $(1/n, 0)$ für alle $n \geq 1$. Jeder von ihnen geht durch den Ursprung $(0,0)$, und wir lassen $x_0 = (0,0) \in X$. Das Ziel dieser Übung ist es zu beweisen, dass $\pi_1(X, x_0)$ eine *überabzählbare* Gruppe ist (wobei X die Unterraumtopologie von $\mathbf{R}^2$ hat).

(a) Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist (eine intuitive Erklärung ist ausreichend).

(b) Zeigen Sie, dass wenn U eine Umgebung von x_0 ist, dann gibt es N so, dass $C_n \subset U$ für alle $n \geq N$.

(c) Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass die Abbildung $r_n \colon X \to C_n$ gegeben durch

$$r_n(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \in C_n, \\ x_0 & \text{wenn } x \notin C_n \end{cases}$$

stetig ist. (Hinweis: Da X ein metrischer Raum ist, kann man hier folgen verwenden.)

(d) Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung $r_{n*} \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(C_n, x_0)$ surjektiv ist.

(e) Für $n \geq 1$ sei $\gamma_n \colon [0,1] \to C_n$ eine Schleife am Basispunkt x_0 auf C_n. Definieren Sie $\gamma \colon [0,1] \to X$ durch

$$\gamma(t) = \gamma_n\left(n(n+1)(t - 1 + \frac{1}{n})\right) \text{ wenn } n \text{ so ist, dass } 1 - \frac{1}{n} \leq t < 1 - \frac{1}{n+1}$$

und $\gamma(1) = x_0$. Zeigen Sie, dass γ eine wohldefinierte stetige Schleife am Basispunkt x_0 ist. (Tipp: Für die Stetigkeit wird die Aufgabe (b) nützlich sein.)

(f) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse von $r_{n*}(\gamma)$ in $\pi_1(C_n, x_0)$ der Äquivalenzklasse von γ_n in $\pi_1(C_n, x_0)$ entspricht für alle $n \geq 1$ ist.

(g) Folgern Sie, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(X, x_0) \to \prod_n \pi_1(C_n, x_0),$$

gibt und dass $\pi_1(X, x_0)$ unabzählbare ist.

(2) Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Seien $(U_i)_{i \in I}$ offene Mengen in X, die alle x_0 enthalten, so dass X die Vereinigung der U_i's ist und $U_i \cap U_j$ ist wegzusammenhängend für alle i und j in I.

(a) Sei $\gamma \colon [0,1] \to X$ eine Schleife am Basispunkt x_0. Zeigen Sie, dass es eine ganze Zahl $m \geq 1$ und reelle Zahlen

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1$$

gibt, so dass für $0 \leq k < m$ die Teilmenge $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_{i(k)}$ für $i(k) \in I$.

(b) Zeigen Sie, dass es Schleifen γ_k am Basispunkt x_0 gibt für $1 \leq k \leq m$ so, dass

$$\gamma \sim_p \gamma_1 \cdots \gamma_m$$

und außerdem $\gamma_k([0,1]) \subset U_{i(k)}$, wobei $\sim_p$ die Weghomotopie Äquivalenz ist. (Hinweis: eine Zeichnung für $|I| = 2$ hilft bei der Konstruktion der γ_k's).

(c) Falls $\pi_1(U_i, x_0) = \{\varepsilon_{x_0}\}$ für alle $i \in I$, folgeren Sie, dass $\pi_1(X, x_0) = \{\varepsilon_{x_0}\}$.

(3) Sei X ein topologischer Raum. Seien $(A_i)_{i \in I}$ wegzusammenhängende Teilmengen von X, so dass

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

nicht leer ist. Zeigen Sie, dass

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

wegzusammenhängend ist.

(4) Lass

$$\mathbf{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Sei $p = (1, 0, 0)$ und $q = (-1, 0, 0)$ in $\mathbf{S}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{S}_2$ und $\mathbf{S}_2 \setminus \{p, q\}$ wegzusammenhängende sind. (Hinweis: Es gibt viele verschiedene Lösungen; man kann z.B. die vorhergehende Übung verwenden, oder explizite Wege zwischen zwei Punkten beschreiben.)

(b) Sei $x_0 = (0, 1, 0)$. Zeigen Sie dass $\pi_1(\mathbf{S}_2 \setminus \{p\}, x_0)$ und $\pi_1(\mathbf{S}_2 \setminus \{q\}, x_0)$ beides triviale Gruppen sind.

(c) Leiten Sie her, dass $\pi_1(\mathbf{S}_2, x) = \{\varepsilon_x\}$ für alle $x \in \mathbf{S}_2$.