TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 13

(1) Sei $p\colon Y \to X$ ein Überlagerung.

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung V von y gibt, so dass die Restriktion von p auf V einen Homöomorphismus $V \to p(V)$ definiert. (Man sagt, dass ein Überlagerung ein *lokaler Homöomorphismus* ist.)

(b) Nehmen wir an, dass X zusammenhängend ist und dass $p^{-1}(\{x\})$ endlich ist für alle $x \in X$. Beweisen Sie dann, dass die Kardinalität von $p^{-1}(\{x\})$ für alle $x \in X$ gleich ist.

(2) Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe S_n auf $\mathbf{C}^n$ operiert durch

$$\sigma \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

für alle $\sigma \in S_n$ von $(x_i) \in \mathbf{C}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass die Projektionsabbildung $p\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n/S_n$ kein Überlagerung ist wenn $n \geq 2$, aber eine ist, wenn $n = 1$. (Tipp: Man kann z.B. die vorherige Übung verwenden.)

(c) Sei

$$U_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n \mid x_i \neq x_j \text{ wenn } i \neq j\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sigma \cdot U_n = U_n$ für alle $\sigma \in S_n$, und dass die Projektionsabbildung $U_n \to U_n/S_n$ ein Überlagerung ist.

(3) Sei $f \in \mathbf{C}[X]$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$. Wir betrachten es als eine stetige Abbildung $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Bezeichnen wir mit Z_f die Menge der Nullstellen von f' und mit $C_f = f(Z_f)$ die Menge der *stationären Werte* von f.

(a) Zeigen Sie, dass, wenn $d \geq 2$, f *kein* Überlagerung ist.

(b) Sei

$$U_f = \{z \in \mathbf{C} \mid f'(z) \neq 0\}.$$

Zeigen Sie, dass es für jedes $z \in U_f$ eine offene Umgebung V_z von z gibt, so dass die Restriktion von f auf V_z einen Homöomorphismus $V_z \to f(V_z)$ definiert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass es eine *kompakte* Umgebung von z gibt, auf der f injektiv ist.)

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung f einen Überlagerung

$$U_f \to \mathbf{C} \setminus C_f = \{z \in \mathbf{C} \mid z \notin C_f\}.$$

definiert. (Hinweis: Bei $w_0 \in \mathbf{C} \setminus C_f$, zeigen Sie, dass $f^{-1}(\{w_0\})$ d Elemente hat, und wende die vorherige Frage auf jedes $z_0 \in f^{-1}(\{w_0\})$; dann konstruieren Sie eine offene Umgebung von w_0, über der f trivialisierbar ist, indem man die Umgebungen V_{z_0} verwendet.)

(4) Sei $p\colon Y \to X$ ein Überlagerung. Sei $g\colon X' \to X$ eine eine stetige Abbildung. Definieren Sie

$$Y' = \{(x,y) \in X' \times Y \mid g(x) = p(y)\},$$

mit der Unterraumtopologie der Produkttopologie. Sei $p_1\colon Y' \to X'$ die Projektion $p_1(x,y) = x$ und $p_2\colon Y' \to Y$ die Projektion $p_2(x,y) = y$.

(a) Zeigen Sie, dass p_1 und p_2 stetig sind und $g \circ p_1 = p \circ p_2$ erfüllen.

(b) Nehmen wir an, dass p eine triviale Überlagerung ist mit $Y = X \times D$ für einen nicht-leeren diskreten Raum D. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Psi\colon Y' \to X' \times D,$$

die durch $\Psi(x,(v,d)) = (x,d)$ für $(x,(v,d)) \in X' \times (X \times D)$ definiert ist, ein Homöomorphismus ist, wobei $X' \times D$ die Produkttopologie hat. (Tipp: Beschreiben Sie die reziproke Bijektion.)

(c) Zeigen Sie, dass im allgemeinen Fall die Projektion $p_1\colon Y' \to X'$ ein Überlagerung ist; man nennt sie die *Pullback von p entlang g*.

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X'$, es eine Bijektion $p_1^{-1}(\{x\}) \to p^{-1}(\{g(x)\})$ gibt.

(5) Für jede ganze Zahl $n \geq 1$, sei $f_n\colon \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_1$ der Überlagerung definiert durch $f_n(z) = z^n$.

(a) Zeigen Sie, dass der Pullback von f_n entlang f_n (in der früherer Übung definiert) eine triviale Überlagerung vom Grad n ist.

(b) Sei $p_1\colon Y' \to \mathbf{S}_1$ die Pullback von f_2 entlang f_3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$q\colon \mathbf{S}_1 \to Y',$$

die durch $q(z) = (z^2, z^3)$ definiert ist, ein Homöomorphismus ist, so dass $p_1 \circ q = f_2$. (Das bedeutet, dass der Pullback von f_2 entlang f_3 "isomorph" zu f_2 ist, als ein Überlagerung von $\mathbf{S}_1$.)