TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 14

Hinweis: Diese Übung wird nicht benotet.

(1) Sei $f\colon Y \to X$ ein Überlagerung und sei $g\colon Z \to X$ eine stetige Abbildung. Sei $z_0 \in Z$ und definieren Sie $x_0 = g(Z_0)$. Sei $y_0 \in Y$ ein solches Element, so dass $f(y_0) = x_0$.

(a) Wir nehmen an, dass g eine Hochhebung $\tilde{g}\colon Z \to Y$ hat (d.h. wir haben $f \circ \tilde{g} = g$), so dass $g(z_0) = y_0$. Zeigen Sie, dass

$$g_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0). \tag{1}$$

Das Ziel der Erinnerung an diese Übung ist der Umkehrung dieses Ergebnisses zu beweisen, wenn Z wegzusammenhängend und lokal-wegzusammenhängend ist. Wir nehmen also nicht an, dass g eine Hochhebung hat, sondern wir nehmen an, dass Z diese Eigenschaften hat und dass

$$g_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0).$$

(b) Für jedes $z \in Z$ und jeden Weg $\gamma\colon [0,1] \to Z$ von z_0 bis z, zeigen Sie, dass es eine eindeutige Hochhebung $\eta\colon [0,1] \to Y$ von $g \circ \gamma$ gibt, so dass $\eta(0) = y_0$.

(c) Sei γ' ein weiterer Weg in Z von z_0 nach z, und η' die entsprechende Hochhebung von $g \circ \gamma'$ nach Y, so dass $\eta'(0) = y_0$. Zeigen Sie, dass es eine Schleife $\alpha\colon [0,1] \to Y$ am Basispunkt y_0 gibt und eine Homotopie $h\colon [0,1] \times [0,1] \to X$, so dass

$$h(s,0) = (g \circ \gamma') * (g \circ \gamma)(s), \qquad h(s,1) = (f \circ \alpha)(s).$$

(Tipp: Verwenden Sie Gleichung (1).)

(d) Zeigen Sie, dass h eine Hochhebung $\tilde{h}\colon [0,1] \times [0,1] \to Y$ hat, so dass $\tilde{h}(s,1) = \alpha(s)$.

(e) Leiten Sie her, dass $\tilde{h}_0\colon s \mapsto \tilde{h}(s,0)$ eine Schleife am Basispunkt y_0 ist.

(f) Zeigen Sie, dass

$$\tilde{h}_0(s) = \begin{cases} \eta(2s) & \text{für } 0 \le s \le 1/2, \\ \eta'(2s-1) & \text{für } 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

(Tipp: Verwenden Sie die Eindeutigkeitseigenschaften des Homotopie-Lifting-Satzes.)

(g) Leiten Sie her, dass $\eta(1) = \eta'(1)$ und dass die Abbildung $\tilde{g}\colon Z \to Y$, $\tilde{g}(z) = \eta(1)$ wohldefiniert ist.

(h) Sei $z \in Z$ und sei U eine Umgebung von $g(z)$ in X so dass f über U trivialisierbar ist. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{g}(z)$ gibt, so dass die Restriktion $f_{\tilde{U}}$ von f auf $\tilde{U}$ ein Homöomorphismus $f_{\tilde{U}}\colon \tilde{U} \to U$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass es eine wegzusammenhängende Umgebung V von z gibt, so dass $g(V) \subset U$; zeigen Sie dann, dass für $w \in V$, $\tilde{g}(w) = f^{-1}_{g(V)}(g(w))$, und leiten Sie ab, dass $\tilde{g}$ stetig ist. (Tipp: Schreiben Sie einen Weg γ von z_0 nach $w \in V$ als

$\gamma_0 * \gamma_w$, wobei γ_0 ein fester Weg von z_0 zu z ist und γ_w ein Weg von z zu w ist, und finden Sie eine explizite Hochhebung von γ_w mit Hilfe von $f_{g(V)}$.)

(j) Zeigen Sie, dass $f \circ \tilde{g} = g$ und $\tilde{g}(z_0) = y_0$, also ist $\tilde{g}$ eine Hochhebung von g, die z_0 auf y_0 abbildet.