# TOPOLOGY SPRING 2024
# SERIE 1

(1) Sei $X$ eine Menge.
  (a) Zeigen Sie, dass die kofinite Topologie
  $$\mathscr{T}_{\text{cof}} := \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ ist endlich oder } U \text{ ist die leere Menge}\}$$
  eine Topologie auf $X$ ist.
  (b) Für welche Mengen $X$ bildet die Menge aller endlicher Teilmengen eine Topologie?

(2) Sei $X$ eine Menge und sei $Y$ ein topologischer Raum. Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Funktion.
  (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathscr{T}$ der Teilmengen von $X$ der Form $U = f^{-1}(V)$ für eine offene Menge $V \subset Y$ eine Topologie auf $X$ ist.
  (b) Zeigen Sie, dass $f : (X, \mathscr{T}) \to Y$ stetig ist.

(3) Seien $X$ und $Y$ topologische Räume. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie offener Mengen in $X$ und sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Funktion (nicht notwendigerweise stetig). Angenommen, dass $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.
  (a) Zeigen Sie, dass $U \subset X$ offen ist, wenn und nur wenn $U_i \cap U$ offen ist für alle $i \in I$.
  (b) Zeigen Sie, dass, wenn $f$ stetig ist, dann $f|U_i$ für alle $i$ stetig ist, wobei $f|U_i\colon U_i \to Y$ die Restriktion von $f$ auf $U_i$ ist, und $U_i$ die Unterraumtopologie hat.
  (c) Beweisen Sie die Umkehrung: wenn $f|U_i$ für alle $i$ stetig ist dann ist $f$ stetig.
  (d) Konstruieren Sie $X$, $Y$, $f$ und ein gewisses $(U_i)_{i \in I}$, so dass $f$ nicht immer dann konstant ist, wenn $f|U_i$ für alle $i$ konstant ist.

  (Dieses Ergebnis lässt sich wie folgt zusammenfassen: Kontinuierlich zu sein ist eine *lokale* Eigenschaft einer Funktion, aber konstant zu sein jedoch nicht.)
  (e) Für $i \in I$, sei $f_i\colon U_i \to Y$ eine stetige Funktion (wobei $U_i$ die Unterraumtopologie hat). Wenn $f_i(x) = f_j(x)$ für alle $i$ und $j$ in $I$ und alle $x \in U_i \cap U_j$, zeigen Sie, dass es eine einzige stetige Funktion $f\colon X \to Y$ gibt, wobei $f_i$ und $f$ auf $U_i$ übereinstimmen.

  (Dieses Ergebnis bedeutet, dass man stetige Funktionen *lokal* definieren kann, vorausgesetzt, dass zwei mögliche Definitionen an den Stellen, an denen eine Mehrdeutigkeit bestehen könnte, dieselbe Antwort geben.)

(4) Sei $X$ ein topologischer Raum.
  (a) Nehmen wir an, dass $X$ ein metrischer Raum ist. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$, offene Mengen $U$ und $V$ gibt mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. (Das ist die sogenannte *Hausdorffeigenschaft*, oder *Trennungseigenschaft*.)

(b) Zeigen Sie, dass wenn $X$ eine unendliche Menge mit der Topologie von Aufgabe 1 ist, dann gilt die Trennungseigenschaft nicht für $X$.

(5) Sei $X = [-1, 1]$ als Unterraum von $\mathbf{R}$ mit der Unterraumtopologie. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen ob sie offen, geschlossen oder keines von beiden in $X$ sind:

$$\{x \in X \mid 1/2 < |x| < 1\}$$
$$\{x \in X \mid 1/2 < |x| \leq 1\}$$
$$\{x \in X \mid 1/2 \leq |x| < 1\}$$
$$\{x \in X \mid 1/2 \leq |x| \leq 1\}.$$