TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 2

(1) Sei X eine Menge.
   (a) Seien d_1 und d_2 Metriken auf X, so dass es $a, b > 0$ gibt mit
   $$d_1(x, y) \leq d_2(x, y)^a$$
   und
   $$d_2(x, y) \leq d_1(x, y)^b$$
   für alle $(x, y) \in X \times X$. Beweisen Sie, dass d_1 und d_2 dieselbe Topologie auf X induzieren.
   (b) Sei d eine Metrik auf X. Zeigen Sie, dass
   $$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
   eine Metrik auf X definiert. Zeigen Sie, dass δ und d dieselben Topologien definieren. Zeigen Sie $\delta(x, y) \leq 1$ für alle $(x, y) \in X \times X$. (Dies zeigt, dass man in jedem metrischen Raum die Metrik so ändern kann, dass zwei beliebige Punkte den Abstand ≤ 1 haben, ohne die Topologie zu ändern.)

(2) Sei $X = \mathbf{R}^2$. Sei d die euklidische Metrik auf X. Definiere:
$$\delta(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{falls } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbf{R}, \\ d(x, 0) + d(0, y) & \text{ansonsten} \end{cases}$$
für $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
   (a) Zeigen Sie, dass δ eine Metrik auf $\mathbf{R}^2$ ist.
   (b) Geben Sie eine geometrische Beschreibung der Mengen
   $$B_\delta((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \delta((x_0, y_0), (x, y)) < r\}.$$
   (c) Zeigen Sie, dass jede offene Menge der euklidischen Topologie eine offene Menge der Topologie $\mathscr{T}_\delta$ ist. ($\mathscr{T}_\delta$ ist die von δ induzierte Topologie).
   (d) Beweisen Sie, dass es offene Mengen bezüglich $\mathscr{T}_\delta$ gibt, die nicht offen bezüglich $\mathscr{T}_d$ sind.

(3) Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass eine Topologie $\mathscr{T}$ auf X die diskrete Topologie ist, genau dann wenn für alle $x \in X$ die Menge $\{x\}$ offen ist bezüglich $\mathscr{T}$.

(b) Finden Sie eine Metrik d auf X, so dass d die diskrete Topologie induziert.

(4) Sei C der Cantor-Raum der Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in \{0,1\}$. Statten Sie C mit der in der Vorlesung definierten Topologie aus.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$t\colon C \to [0,1],\ t((x_n)) = \sum_{n\geq 1} \frac{2x_n}{3^n}$$

wohldefiniert, stetig und injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Bild von t in $[0,1]$ geschlossen ist. (Tipp: Zeigen Sie, dass das Komplement offen ist; dazu kann man verwenden, falls $x \in [0,1]$ nicht im Bild von C liegt, dann gibt es eine ternäre Erweiterung

$$x = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n}$$

mit $a_n \in \{0,1,2\}$ und mindestens einem a_n gleich 1).

(c) Zeigen Sie, dass die Inverse $t^{-1}\colon t(C) \to C$ stetig ist. (Damit ist C homöomorph zur Teilmenge $t(C)$ von $[0,1]$.)
Bemerkung: Wir werden bald sehen, dass (b) und (c) unmittelbar aus der *Kompaktheit* von C folgt.