TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 4

(1) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X Hausdorff ist, genau dann wenn für jedes $x \in X$ gilt
$$\bigcap_{x \in U} \overline{U} = \{x\}$$
wobei U über alle Umgebungen von x läuft.

(2) Sei X ein topologischer Raum.
   (a) Sei X ein Hausdorff-Raum. Zeigen Sie, dass jeder Filter $\mathfrak{F}$ auf X, der konvergiert, einen eindeutigen Grenzwert besitzt.
   (b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung wahr ist: Nehmen wir an, ein konvergenter Filter $\mathfrak{F}$ auf X hat immer einen eindeutigen Grenzwert. Zeigen Sie, dass X ein Hausdorff-Raum ist. (Tipp: Betrachten Sie die Menge
$$\mathfrak{F} = \{\emptyset \neq A \subset X \mid A \supset V \cap W \text{ für offene Umgebungen } V \text{ von } x \text{ und } W \text{ von } y\},$$
   und zeigen Sie, dass $\mathfrak{F}$ ein Filter auf X ist).

(3) Seien X und Y zwei topologische Räume. Wir definieren die folgende Topologie auf $X \times Y$: Sei $U \subset X \times Y$ offen, genau dann wenn es für jedes $(x, y) \in U$ Umgebungen V und W von x und y gibt, so dass $V \times W \subset U$. Dies ist die Produkttopologie.
   (a) Überprüfen Sie, dass dies eine Topologie auf $X \times Y$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass X ein Hausdorff-Raum ist, genau dann wenn die Diagonale
$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$
   abgeschlossen in $X \times X$ ist (mit der obigen Topologie für $Y = X$).

   In den folgenden Teilaufgaben sei Y ein Hausdorff-Raum.
   (c) Für jeden topologischen Raum X und beliebige stetige Funktionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon X \to Y$, zeigen Sie, dass die Mengen
$$\{(x, y) \mid f(x) = g(y)\}, \qquad \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
   in $X \times X$ bzw. in X abgeschlossen sind.
   (d) Für einen topologischen Raum X und beliebige stetige Funktionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon X \to Y$, zeigen Sie, falls $f(x) = g(x)$ für alle x in einer dichten Menge, dass dann gilt $f = g$.
   (e) Zeigen Sie für jeden topologischen Raum X und jede stetige Funktion $f\colon X \to Y$, dass der Graph von f
$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$
   in $X \times Y$ abgeschlossen ist.

(4) Sei $X = \mathbf{R}$ mit der kofiniten Topologie.
   (a) Zeigen Sie, dass es für jedes $x \neq y$ in X eine Umgebung U von x existiert, so dass $y \notin U$, dass X jedoch nicht Hausdorff ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Graph der Identität $X \to X$ in $X \times X$ nicht abgeschlossen ist (beglich der Produkttopologie).
(c) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon X \to X$ stetig ist, wenn *entweder* f konstant ist, *oder* wenn die Gleichung $f(x) = y$ höchstens endlich viele Lösungen für alle $y \in \mathbf{R}$ hat. Insbesondere ist jede Bijektion $X \to X$ stetig.
(d) Finden Sie Beispiele für zwei Bijektionen $f\colon X \to X$ und $g\colon X \to X$ so, dass $f-g$ *nicht* stetig ist.
(e) Finden Sie Beispiele, die zeigen, dass die Eigenschaften von (c) und (d) der vorherigen Übung nicht immer zutreffen, wenn X nicht Hausdorff ist.

(5) Sei X ein topologischer Raum.
(a) Sein A_1 und A_2 kompakte Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass $A_1 \cup A_2$ kompakt ist.
(b) Falls X Hausdorff ist, zeigen Sie, dass $A_1 \cap A_2$ kompakt ist.

(6) Seien X und Y zwei topologische Räume, mit Y kompakt und Hausdorff. Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Funktion, so dass der Graph Γ_f von f *abgeschlossen* in $X \times Y$ ist (mit der Topologie aus Übung 3.)
(a) Sei $x_0 \in X$ und $y_0 = f(x_0)$. Für jedes $y \neq y_0$ in Y, zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U_y von x_0 und V_y von y gibt, so dass $(U_y \times V_y) \cap \Gamma_f = \emptyset$. (Tipp: Beachten Sie dass $(x_0, y) \notin \Gamma_f$; verwenden Sie die Annahme und die Definition der Produkttopologie.)
(b) Sei V eine offene Umgebung von y_0 in Y. Folgern Sie aus (a), dass es eine offene Umgebung U von x_0 gibt, so dass

$$(U \times (Y \setminus V)) \cap \Gamma_f = \emptyset.$$

(Tipp: Verwenden Sie die Kompaktheit von Y.)
(c) Beweisen Sie, dass f stetig ist. (Dies ist ein Beispiel für einen *closed graph theorem*, eine Aussage, die zeigt, dass bestimmte Funktionen stetig sind, sobald ihre Graphen abgeschlossen sind.)

(7) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X kompakt ist, genau dann wenn es für jede Familie $(U_x)_{x \in X}$ von offenen Mengen, wobei U_x eine offene Umgebung von x für alle x ist, eine endliche Teilmenge $S \subset X$ gibt, so dass

$$X = \bigcup_{x \in S} U_x.$$

(Mit anderen Worten, es ist ausreichend, die offenen Überdeckungen zu betrachten, die man in vielen Beispielen sieht: mit X als Indexmenge, und U_x offenen Umgebungen von x.)