TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 5

(1) Sei X ein topologischer Raum.

(a) Wenn X Hausdorff ist, zeigen Sie, dass $\{x\}$ in X abgeschlossen ist für alle $x \in X$.

Wir definieren eine Menge $\widetilde{X} = X \cup \{\eta\}$, wobei η ein beliebiges mathematisches Objekt ist, das nicht in X liegt. Wir definieren eine Topologie auf $\widetilde{X}$ wie folgt: U ist offen, genau dann wenn entweder $U = \emptyset$, oder $U = V \cup \{\eta\}$ für eine offene Menge $V \subset X$.

(b) Überprüfen Sie, dass dies eine Topologie definiert, und dass die Inklusion $X \to \widetilde{X}$ stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\overline{\{\eta\}} = \widetilde{X}$, d.h., dass der Punkt η dicht in $\widetilde{X}$ ist.

(2) Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum.

(a) Sei $x \in X$ und $A \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum mit $x \notin A$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von x gibt so dass $\overline{U} \cap A = \emptyset$. (Tipp: Gehen Sie vor ähnlich wie im Beweis dass eine kompakte Teilmenge von X abgeschlossen ist, um eine offene Umgebung U von x und eine offene Menge V zu finden, so dass $A \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.)

Sei $(C_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $C_n^\circ = \emptyset$ für alle n. Bezeichne

$$C = \bigcup_{n\geq 1} C_n.$$

Sei $U \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge von X.

(b) Sei $U_0 = U$. Zeigen Sie, dass man durch Induktion eine Folge von offenen Mengen $(U_n)_{n\geq 1}$ konstruieren kann, so dass für alle $n \geq 1$, die Eigenschaften

$$\begin{cases} \overline{U}_n \cap C_n = \emptyset \\ \overline{U}_n \subset U_{n-1} \end{cases}$$

erfüllt sind. (Tipp: Verwenden Sie (a) und dass $C_n^\circ = \emptyset$, also dass C_n keine offene Menge enthält.)

(c) Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{U}_n \neq \emptyset,$$

und leiten Sie ab, dass $U \cap (X \setminus C) \neq \emptyset$.

(d) Leiten Sie ab, dass $C^\circ = \emptyset$ (dies ist bekannt als die *Baire-Eigenschaft*).

(e) Sei (V_n) eine Folge von dichten offenen Mengen in X. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\bigcap_{n\geq 1} V_n$$

immer noch dicht in X ist.

(f) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge (V_n) von dichten offenen Mengen im kompakten Raum $[0,1]$, so dass $\bigcap_{n\geq 1} V_n$ nicht offen ist.

(3) Sei $X = \mathbf{R}\times\{-1,1\}$ mit der Produkttopologie (wobei $\{-1,1\}$ die diskrete Topologie hat). Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf X durch

$$(x,1) \sim (x,-1) \text{ if } x \neq 0,$$

so dass keine weiteren Äquivalenzen außer der Gleichheit gibt. (Insbesondere haben die Äquivalenzklassen o_+ und o_- der Punkte $(0,1)$ und $(0,-1)$ nur ein Element und ergeben verschiedene Punkte in Y.) Sei $Y = X/\sim$ der Raum der Äquivalenzklassen. Sei $p\colon X \to Y$ die Quotientenabbildung; definieren Sie eine Topologie $\mathscr{T}$ auf Y so, dass $U \subset Y$ offen ist, genau dann wenn $p^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

(a) Zeigen Sie, dass dies eine Topologie auf Y definiert.
(b) Definieren Sie für $\varepsilon \in \{-1,1\}$ die Abbildung $i_\varepsilon\colon \mathbf{R} \to Y,\ x \mapsto [(x,\varepsilon)]$ (die Äquivalenzklasse von (x,ε)). Zeigen Sie, dass i_ε stetig und injektiv ist.
(c) Zeigen Sie, dass i_+ das Bild $Y \setminus \{o_-\}$ hat und einen Homöomorphismus $\mathbf{R} \to Y \setminus \{o_-\}$ ergibt. Analog definiert i_- einen Homöomorphismus $\mathbf{R} \to Y \setminus \{o_+\}$.
(d) Zeigen Sie, dass Y eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ist (d.h. für jedes $y \in Y$ gibt es eine offene Umgebung von y, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbf{R}$ ist).
(e) Zeigen Sie, dass jedes y in Y eine abzählbare Umgebungsbasis hat.
(f) Zeigen Sie, dass Y *nicht* Hausdorff ist. Finden Sie insbesondere eine Folge (y_n) in Y, die sowohl zu o_+ als auch zu o_- konvergiert.

(4) Sei X ein kompakter topologischer Raum. Wir bezeichnen mit $\mathscr{C}(X)$ die Menge der stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbf{C}$, wobei $\mathbf{C}$ die euklidische Topologie hat.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{C}(X)$ ein kommutativer Ring ist, wobei Addition gegeben durch $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, Multiplikation durch $(fg)(x) = f(x)g(x)$ und das neutrale Element für die Multiplikation die konstante Funktion 1 ist.

Sei $I \subset \mathscr{C}(X)$ ein Ideal (d.h. eine Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathscr{C}(X),+)$, so dass falls $f \in I$ und $g \in \mathscr{C}(X)$, gilt $fg \in I$). *Das Ziel der Übung ist zu zeigen, dass entweder $I = \mathscr{C}(X)$ oder es existiert $x_0 \in X$ so, dass*

$$I \subset m_{x_0} = \{f \in \mathscr{C}(X) \mid f(x_0) = 0\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto |f(x)|^2$ in I ist für alle $f \in I$.
(c) Zeigen Sie, dass m_{x_0} ein Ideal ist für alle $x_0 \in X$.
(d) Zeigen Sie, dass wenn es eine Funktion $f \in I$ gibt, für die $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, dann $I = \mathscr{C}(X)$.
(e) Angenommen, es gibt kein x_0, so dass $I \subset m_{x_0}$. Leiten Sie ab, dass es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x und eine Funktion $f_x \in I$, so dass $f_x(y) \neq 0$ für alle y in U_x.
(f) Leiten Sie her, dass, wenn es kein x_0 gibt, so dass $I \subset m_{x_0}$, dann ist $I = \mathscr{C}(X)$. (Tipp: Konstruieren Sie unter Verwendung der Kompaktheit und der f_x eine Funktion in I, die keine Nullstelle in X hat).

(g) Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal ist (d.h. ein Ideal $I \neq \mathscr{C}(X)$, das in keinem anderen richtiges Ideal enthalten ist), genau dann wenn $x_0 \in X$ existiert, so dass $I = m_{x_0}$.

(Die Ergebnisse dieser Übung stehen im Zusammenhang mit der *Gelfand Äquivalenz* zwischen kompakten topologischen Räumen und bestimmten abstrakten Ringen.)