TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 6

(1) Sei X eine nichtleere Menge.

(a) Zeigen Sie, dass ein Ultrafilter $\mathscr{F}$ auf X prinzipiell ist, genau dann wenn es eine endliche Menge $A \subset X$ gibt, so dass $A \in \mathscr{F}$.

(b) Zeigen Sie, dass, wenn X unendlich ist, ein nicht-prinzipieller Ultrafilter auf X existiert (Tipp: Betrachten Sie die Komplemente endlicher Mengen).

(c) Sei $\mathscr{F}$ ein Ultrafiler auf X. Zeigen Sie, dass wenn A, B Teilmengen von X sind, dann $A \cup B \in \mathscr{F}$ genau dann, wenn $A \in \mathscr{F}$ oder $B \in \mathscr{F}$. (Tipp: wenn $A \cup B \in \mathscr{F}$ und $A \notin \mathscr{F}$, zeigen Sie, dass $B \setminus A \subset \mathscr{F}$).

(d) Definieren Sie für $\mathscr{F}$ wie oben eine Funktion $\mu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } A \in \mathscr{F} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für beliebige Teilmengen A, B von X mit $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(e) Umgekehrt sei $\nu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}$ so, dass $\nu(X) = 1$ und

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$$

wenn A, B disjunkte Teilmengen von X sind.
Zeigen Sie, dass

$$\nu(A \cap B) + \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$$

für beliebige Teilmengen A und B von X.

(f) Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{F}_\nu = \{A \subset X \mid \nu(A) = 1\}$$

ein Ultrafilter auf X ist.
(Diese letzten Fragen zeigen, dass Ultrafilter auf X mit einigen Arten von endlich-additiven Maßen auf X identifiziert werden können.)

(2) (a) Sei X ein topologischer Raum und sei A eine zusammenhängende Teilmenge von X. Wenn B eine Teilmenge von X ist so, dass $A \subset B \subset \overline{A}$, zeigen Sie, dass B zusammenhängend ist.

(b) Sei

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } y = \sin(1/x)\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass A zusammenhängend ist.

(c) Sei

$$B = A \cup \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass B zusammenhängend ist.

(3) Sei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X.

(a) Zeigen Sie, dass
$$X - \partial A = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$$
wobei $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ der Rand von A ist.

(b) Sei $B \subset X$ ein *zusammenhängender* Unterraum. Wenn $B \cap \partial A$ leer ist, zeigen Sie, dass $B \subset A^\circ$ oder $B \subset (X \setminus A)^\circ$.

(c) Für B wie oben, wenn $B \cap A$ und $B \cap (X \setminus A)$ beide nicht leer sind, folgeren Sie, dass $B \cap \partial A \neq \emptyset$.

(d) Wenn X zusammenhängend ist, und A weder leer noch gleich zu X ist, zeigen Sie, dass ∂A nicht leer ist.

(e) Wenn X nicht zusammenhängend ist, finden Sie eine Teilmenge A, die weder leer noch gleich zu X, mit $\partial A = \emptyset$.

(4) Sei C der Cantor-Raum. Zeigen Sie, dass wenn $A \subset C$ zusammenhängend ist, dann ist A entweder leer oder ein einzelner Punkt. (Tipp: Betrachten Sie die Projektionen $p_n \colon C \to \{0, 1\}$, die ein Element von C auf seine n-te Koordinate abbilden).

(5) Sei $d \geq 0$ eine ganze Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{R}^d$ zusammenhängend ist. (Tipp: Betrachten Sie zunächst die Fälle $d = 0$ und $d = 1$; betrachten Sie dann für $d \geq 2$ eine stetige Funktion $f \colon \mathbf{R}^d \to \{0, 1\}$ und zeigen Sie, dass sie konstant ist durch Komposition mit geeigneten Karten $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^d$).

(b) Falls $d = 1$, zeigen Sie, dass $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ nicht zusammenhängend ist. Was sind seine zusammenhängenden Komponenten?

(c) Falls $d \geq 2$, zeigen Sie, dass $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ zusammenhängend ist. (Tipp: Verwenden Sie Ideen wie in (a)).

(d) Sei $\mathbf{S}_d \subset \mathbf{R}^{d+1}$ die Menge von $(x_1, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbf{R}^{d+1}$ so, dass
$$x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2 = 1.$$
Zeigen Sie, dass $\mathbf{S}_d$ zusammenhängend ist, genau dann wenn $d \geq 1$. (Tipp: Finden Sie eine surjektive stetige map $\mathbf{R}^{d+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{S}_d$.)

(e) Sei $r \geq 0$. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Kugel
$$B_r = \{x \in \mathbf{R}^d \mid 0 \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2} \leq r\}$$
zusammenhängend ist. (Tipp: Eine Möglichkeit ist, zusammenhängende Teilmengen C_s zu finden für $0 \leq s \leq r$ so, dass
$$B_r = \bigcup_{0 \leq s \leq r} C_s$$
und so, dass die C_s einige gemeinsame Punkte haben).

(6) Sei
$$X = \mathbf{S}_1 \setminus \{(0, 1)\} \subset \mathbf{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass X, mit der Unterraumtopologie, ein zusammenhängender metrischer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass es einige Kugeln in X gibt, die nicht zusammenhängde sind.

(7) Diese Übung gibt eine andere Darstellung des Beweises, dass $[a, b]$ kompakt in $\mathbf{R}$ ist, indem man die Zusammenhängigkeit von Intervallen verwendet. Seien $(U_i)_{i \in I}$ offenen Teilmengen von $\mathbf{R}$, für die gilt

$$[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$G = \{t \in [a, b] \mid [a, t] \text{ ist enthalten in } \bigcup_{j \in J} U_j \text{ für eine endliche Teilmenge } J \subset I\}$$

offen in $[a, b]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass G in $[a, b]$ abgeschlossen ist.

(c) Schließen Sie, dass $G = [a, b]$ ist, und dass $[a, b]$ kompakt ist.