TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 7

(1) Sei $X = [0, +\infty[$. Betrachten Sie eine Funktion

$$\delta \colon X \times X \to [0, +\infty[$$

wobei

$$\delta(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|.$$

(a) Zeigen Sie, dass δ eine Metrik auf X ist.
(b) Zeigen Sie, dass die durch δ auf X induzierte Topologie die euklidische Unterraumtopologie ist. (Tipp: Betrachten Sie die Abbildung $f \colon (X, \delta) \to]0, 1]$, die durch $f(x) = e^{-x}$ gegeben ist, und zeigen Sie, dass diese ein Homöomorphismus ist.)
(c) Zeigen Sie, dass (X, δ) *nicht* vollständig ist.
(d) Zeigen Sie, dass X ein vollständiger Raum mit der Einschränkung des euklidischen Metrik ist.

Diese Übung veranschaulicht die Tatsache, dass die Vollständigkeit eines metrischen Raumes nicht einfach von der Topologie abhängt.

(2) In einem metrischen Raum (X, d) ist der *Durchmesser* einer nichtleeren Teilmenge $Y \subset X$ wie folgt definiert

$$\operatorname{diam}(Y) = \sup\{d(x, y) \mid (x, y) \in Y^2\}$$

wenn dieses Supremum in $\mathbf{R}$ existiert, oder $+\infty$ andernfalls.

Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Sei $(C_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X, so dass $C_n \supset C_{n+1}$ für $n \geq 1$.

(a) Unter der Annahme, dass $C_n \neq \emptyset$ und dass

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(C_n) = 0,$$

zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{n\geq 1} C_n \neq \emptyset.$$

(Tipp: Zeigen Sie, dass, wenn (x_n) eine Folge mit $x_n \in C_n$ ist, sie eine Cauchy-Folge ist, und dass ihr Grenzwert im Schnittpunkt liegt.)
(b) Zeigen Sie, dass die vollständigkeit von X notwendig ist (finden Sie ein Gengenbeispiel falls X nicht vollständig ist).

(3) Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Sei $(C_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X, jede mit leerem Inneren. Sei $C = \bigcup_{n\geq 1} C_n$.

Sei U eine nichtleere offene Teilmenge von X.

(a) Sei $U_0 = U$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(U_n)_{n\geq 1}$ von nichtleeren offenen Mengen in X gibt, so dass

$$\begin{cases} \overline{U}_n \cap C_n = \emptyset \\ \overline{U}_n \subset U_{n-1} \\ d(x,y) < \frac{1}{n} \text{ für alle } (x,y) \in U_n \times U_n \end{cases}$$

für $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{U}_n \neq \emptyset.$$

(c) Folgern Sie, dass $U \cap (X \setminus C) \neq \emptyset$ ist, und dass somit C leeres Inneres hat. (Dies ist der Satz von Baire für vollständige metrische Räume; eine Version für kompakte Räume war in Übung 2 von Übungsblatt 5.)

(4) Sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und sei $f\colon X \to X$ eine stetige Abbildung, so dass

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$$

für alle $(x,y) \in X^2$ für eine Konstante $\alpha < 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes x_0 in X die Folge (x_n), die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definiert ist, zu einer Lösung $y \in X$ der Gleichung $f(y) = y$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges $y \in X$ gibt mit $f(y) = y$.

(5) Sei

$$X = (\{0\} \times [-1,1]) \;\cup\; \bigcup_{n\geq 1} \{1/n\} \times [-1,1] \;\cup\; ([0,1] \times \{1\}) \subset \mathbf{R}^2$$

mit der euklidischen Unterraumtopologie.

(a) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist. (Tipp: Es ist nützlich, die Menge X in $\mathbf{R}^2$ einzuzeichnen.)

(b) Sei $x_0 = (0,0) \in X$. Erklären Sie, warum Mengen der Form

$$U_\delta = X \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < \delta, \quad |y| < \delta\}$$

für $0 < \delta < 1$ eine Umgebungsbasis von x_0 in X bilden.

(c) Angenommen $0 < \delta < 1$. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponente von x_0 in der Umgebung U_δ die Menge $\{0\} \times]-\delta, \delta[$ ist.

(d) Leiten Sie her, dass X *nicht* lokal zusammenhängend ist.

(e) Geben Sie ein Beispiel für einen lokal zusammenhängenden Raum, der nicht zusammenhängend ist.

(6) Erinnern Sie sich, dass jeder Unterraum eines kompakten Hausdorff-Raums lokal kompakt ist. In dieser Übung soll der Umkehrschluss gezeigt werden: Jeder lokal kompakte Hausdorff-Raum ist homöomorph zu einem Unterraum eines kompakten topologischen Hausdorff-Raums.

Sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum. Bezeichne ∞ ein beliebiges mathematisches Objekt, das nicht in X liegt. Definieren Sie $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$. Sei $i\colon X \to \widehat{X}$ die Inklusionsabbildung.

(a) Sei $\mathscr{T}_\infty$ die Menge der Teilmengen U von $\widehat{X}$, die entweder offene Teilmengen von X sind, oder Mengen der Form $\{\infty\} \cup (X \setminus C)$ für $C \subset X$ kompakt. Zeigen Sie, dass $\mathscr{T}_\infty$ eine Topologie auf $\widehat{X}$ ist. (Übung 5 von Übungsblatt 4 wird nützlich sein, muss aber teilweise verallgemeinert werden.)
(b) Zeigen Sie, dass $\widehat{X}$ ein Hausdorff-Raum ist. (Tipp: Um disjunkte Umgebungen von $x \neq y$ zu finden, betrachten Sie den Fall, in dem x oder y getrennt ∞ ist.)
(c) Zeigen Sie, dass i stetig ist und dass i einen Homöomorphismus $X \to i(X) \subset \widehat{X}$ definiert.
(d) Zeigen Sie, dass $\widehat{X}$ kompakt ist.
(e) Wo wurde in diesem Beweis verwendet, dass X lokal kompakt ist? Was passiert, wenn X als kompakt angenommen wird?

Der Raum $\widehat{X}$ heißt die *Alexandrov Kompaktifizierung* von X.