TOPOLOGY SPRING 2024
SERIE 8

(1) Sei $X = L^2([0,1])$ mit der Topologie definiert durch den Abstand

$$d(f,g) = \Big(\int_0^1 |f-g|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

(a) Zeigen Sie für $f \in X$ und $\varepsilon > 0$, dass die abgeschlossene Kugel

$$B(f;\varepsilon) = \{g \in X \mid d(f,g) \leq \varepsilon\}$$

nicht kompakt ist. (Tipp: Beginnen Sie mit $f = 0$ und $\varepsilon = 1$, was ein Beispiel in der Vorlesung war.)

(b) Leiten Sie her, dass X *nicht* lokal kompakt ist, und dass es tatsächlich kein $f \in X$ gibt, das eine kompakte Umgebung hat.

(2) Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und sei

$$X = \prod_{i\in I} X_i,$$

mit der Produkttopologie.

(a) Wenn X_i Hausdorff für alle i ist, so beweise, dass X auch Hausdorff ist.

(b) Sei $Y_i \subset X_i$ eine beliebige Teilmenge für jedes i. Zeigen Sie, dass die Unterraumtopologie auf

$$Y = \prod_{i\in I} Y_i \subset X$$

das Produkt der Unterraumtopologien von Y_i ist.

(c) Sei $Y_i \subset X_i$ eine beliebige Teilmenge für jedes i. Zeigen Sie, dass

$$\overline{\prod_{i\in I} Y_i} = \prod_{i\in I} \overline{Y}_i.$$

(d) Wenn $C_i \subset X_i$ für alle i abgeschlossen ist, zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$\prod_{i\in I} C_i$$

in X abgeschlossen ist.

(e) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge I, Räume X_i und offene Teilmengen $U_i \subset X_i$, so dass

$$\prod_{i\in I} U_i$$

in X nicht offen ist.

(f) Sei $x_n = (x_{n,i})_{i\in I}$ ein Element von X für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) zu einem Element $x = (x_i)_{i\in I}$ von X konvergiert, genau dann wenn $x_{n,i} \to x_i$ für $n \to \infty$ und alle $i \in I$.

(g) Zeigen Sie, dass für jedes $x = (x_i)$ in X, die Zusammenhangskomponente von X gleich dem Produkt der Zusammenhangskomponenten Y_i von x_i in X_i ist.

(3) Sei $(X_n, d_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von metrischen Räumen. Bezeichne

$$X = \prod_{n\geq 1} X_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $x = (x_n)$ und $y = (y_n)$ in X, die Reihe

$$d(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

(absolut) konvergent ist und dass die von ihr definierte Funktion $d\colon X \times X \to [0, +\infty[$ eine Metrik auf X ist.

(b) Zeigen Sie, dass die durch d definierte Topologie die Produkttopologie auf X ist.

(c) Zeigen Sie, dass wenn X_n für alle n vollständig ist, dann ist X vollständig. (Diese Tatsache gilt auch für ein beliebiges Produkt von vollständigen Räumen im Sinne uniformer Strukturen.)

(d) Nehmen Sie an, dass X_n für alle n kompakt ist. Zeigen Sie, dass wenn $x_m = (x_{m,n})_{n\geq 1}$ ein Element von X für alle $m \geq 1$ ist, dann hat die Folge $(x_m)_{m\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge. (Tipp: Zeigen Sie, dass für jedes $N \geq 1$, eine Folge $x^{(N)} = (x_k^{(N)})_{k\geq 1}$ von Elementen von X existiert, so dass (1) $x^{(1)} = (x_m)$; (2) $x^{(N)}$ ist eine Teilfolge von $x^{(N-1)}$; (3) für $1 \leq n \leq N$ ist die Folge der n-ten Koordinaten

$$(x_k^{(N)})_n$$

konvergent für $k \to +\infty$. Um die Aussage zu folgern, konstruieren Sie eine konvergente Teilfolge von (x_m) durch ein Diagonalen-Argument.)

(e) Zeigen Sie, dass X kompakt ist, ohne den Satz von Tychonov zu verwenden.

(4) Seien X_1 und X_2 topologische Räume und $X = X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie.

(a) Sei Y ein topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass für jedes $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ die Abbildungen

$$f_{x_2}\colon \begin{cases} X_1 \to Y \\ x \mapsto f(x, x_2) \end{cases}, \qquad g_{x_1}\colon \begin{cases} X_2 \to Y \\ x \mapsto f(x_1, x) \end{cases}$$

stetig sind.

(b) Sei $X_1 = X_2 = \mathbf{R}$ und definieren Sie $f\colon X \to \mathbf{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{wenn } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_{x_2} und g_{x_1} alle stetig sind, aber dass f nicht stetig ist.

Sei $X_1 = X_2 = Y = \mathbf{R}$. Nehmen wir an, dass die Funktionen f_{x_2} und g_{x_1} stetig für alle $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ sind. Es sei $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ und $y = f(x_1, x_2)$.

(c) Zeigen Sie für $\varepsilon > 0$, dass es $y_1 < y_2$ in $\mathbf{R}$ gibt mit $y_1 < x_2 < y_2$ so dass $y - \varepsilon < f(x_1, x) < y + \varepsilon$ wenn $y_1 < x < y_2$.

(d) Sei $v_1 < v_2$ so, dass $y_1 < v_1 < x_2 < v_2 < y_2$. Zeigen Sie, dass es $\delta > 0$ so gibt, so dass

$$y - \varepsilon < f(x, v_1) < y + \varepsilon$$
$$y - \varepsilon < f(x, v_2) < y + \varepsilon$$

für $x_1 - \delta < x < x_1 + \delta$.

(e) Nehmen wir weiter an, dass $g_{x_1} \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton steigend für alle $x_1 \in \mathbf{R}$ ist. Folgern Sie, dass f stetig ist.