# TOPOLOGY SPRING 2024
## SERIE 9

In diesen Übungen verwenden wir den folgenden Begriff: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *offen* wenn $f(U)$ offen in $Y$ für alle offenen Teilmengen $U$ von $X$ ist.

(1) Für $z \in \mathbf{C}$ und $r \geq 0$ bezeichnen wir mit $C(z,r)$ den Kreis um den Punkt $z$ mit Radius $r$ in $\mathbf{C}$, d.h. $C(z,r) = \{w \in \mathbf{C} \mid |w - z| = r\}$.

Sei $X = [0,2] \subset \mathbf{R}$ und $Y = C(i,1) \cup C(-i,1)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ definiert ist als

$$\varphi(t) = \begin{cases} i + e^{2i\pi(t-1/4)} & \text{if } 0 \leq t \leq 1 \\ -i + e^{2i\pi(t-3/4)} & \text{if } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

wohldefiniert ist, und dass sie stetig ist.

(b) Definieren Sie eine Äquivalenzrelation auf $X$ mit Äquivalenzklassen $\{0,1,2\}$ und $\{t\}$ für $t \in X \setminus \{0,1,2\}$. Sei $X' = X/\sim$ und $p\colon X \to X'$ die Projektion. Zeigen Sie, dass es eine stetige Abbildung $\widetilde{\varphi}\colon X' \to Y$ gibt, so dass $\widetilde{\varphi} \circ p = \varphi$, und dass $\widetilde{\varphi}$ stetig ist, wobei $X'$ die Quotiententopologie trägt.

(c) Zeigen Sie, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Homöomorphismus ist.

(2) Seien $X$ und $Y$ topologische Räume mit Äquivalenzrelationen $\sim_X$ und $\sim_Y$ auf $X$ bzw. $Y$. Sei $Z = X \times Y$ mit der Produkttopologie. Auf $Z$ sei $\sim$ die Äquivalenzrelation definiert durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \text{genau dann wenn} \quad (x_1 \sim_X x_2 \text{ und } y_1 \sim_Y y_2).$$

Bezeichne mit

$$X' = X/\sim_X, \quad Y' = Y/\sim_Y, \quad Z' = Z/\sim$$

die jeweiligen Quotienten, ausgestattet mit der Quotiententopologie. Schließlich bezeichnen $p_X$, $p_Y$ und $p$ die Projektionen

$$p_X\colon X \to X', \quad p_Y\colon Y \to Y', \quad p\colon Z \to Z'.$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion gibt

$$\varphi\colon Z' \to X' \times Y'$$

so dass die Äquivalenzklasse von $(x,y)$ auf $(p_X(x), p_Y(y))$ abgebildet wird, und dass $\varphi$ stetig ist, wenn $X' \times Y'$ die Produkttopologie hat.

(b) Angenommen, $p_X$ und $p_Y$ sind *offene* Abbildungen. Zeigen Sie, dass $\varphi(p(W))$ in $X' \times Y'$ für alle offenen Teilmengen $W \subset Z$ offen ist.

(c) Leiten Sie her, dass $\varphi$ in diesem Fall ein Homöomorphismus ist.

(3) Sei $X$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Sei $X' = X/\sim$ und $p\colon X \to X'$ die Projektion. Sei

$$\Gamma = \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$$

der *Graph* der Äquivalenzrelation. Definieren Sie die Relation $\equiv$ auf $X \times X$ durch

$$(x,y) \equiv (x',y') \quad \text{genau dann wenn} \quad x \sim x' \text{ und } y \sim y'.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Gamma = q^{-1}(q(\Delta))$ wobei

$$\Delta = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

die Diagonale in $X \times X$ und $q\colon X \times X \to (X \times X)/\equiv$ die Projektion ist.

(b) Wenn die Abbildung $p$ offen ist und $\Gamma$ in $X \times X$ abgeschlossen ist, zeigen Sie, dass die Diagonale

$$\Delta' = \{(x,x) \in X' \times X' \mid x \in X'\}$$

in $X' \times X'$ für die Produkttopologie abgeschlossen ist. (Tipp: Verwenden Sie die vorherige Übung.)

(c) Leiten Sie her, dass der Raum $X'$ in diesem Fall Hausdorff ist. (Tipp: Verwenden Sie Übung 3 von Übungsblatt 4).

(4) Wir verwenden den Kontext und die Notation aus Ausgabe 2, mit $X = Y = \mathbf{R}$ (mit euklidischer Topologie), und lassen $\sim_X$ die Gleichheitsrelation sein, $\sim_Y$ die Relation, bei der die Äquivalenzklasse von $0$ $\mathbf{Z}$ ist, während die Äquivalenzklasse von $x \notin \mathbf{Z}$ $\{x\}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $p_X$ offen ist.

(b) Zeigen Sie, dass, wenn $A \subset Y$ eine beliebige Teilmenge ist, dann

$$p_Y^{-1}(p_Y(A)) = \begin{cases} A & \text{wenn } A \cap \mathbf{Z} = \emptyset \\ \mathbf{Z} \cup A & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

(c) Leiten Sie her, dass die Karte $p_Y$ nicht offen ist. Zeigen Sie aber, dass $p_Y(C)$ abgeschlossen ist, wenn $C$ abgeschlossen ist.

(d) Zeigen Sie, dass ein Umgebungsbasis von $(p_X(0), p_Y(0))$ in $X' \times Y'$ gegeben ist durch die Mengen der Form

$$p_X(]-\delta,\delta[) \times p_Y\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} ]n-\varepsilon_n, n+\varepsilon_n[\Big)$$

wobei $\delta > 0$ und $\varepsilon_n > 0$ für $n \in \mathbf{Z}$ beliebige positive reelle Zahlen sind.

(e) Zeigen Sie, dass ein Umgebungsbasis von $p(0,0)$ in $Z'$ gegeben ist durch die Mengen der Form

$$p\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} ]-\delta_n,\delta_n[ \times ]n-\varepsilon_n, n+\varepsilon_n[\Big)$$

wobei $\delta_n > 0$ und $\varepsilon_n > 0$ für $n \in \mathbf{Z}$ beliebige positive reelle Zahlen sind.

(f) Folgern Sie, dass $\varphi\colon Z' \to X' \times Y'$ *kein* Homöomorphismus ist.

(g) Kannst du ein intuitives Gefühl für die “Form” von $Y'$ bekommen? Für die von $Z'$?

(5) Seien $n \geq 1$ und $k \leq n$ nichtnegative ganze Zahlen. Sei $H_k \subset \mathbf{R}^n$ die Untergruppe, die isomorph zu $\mathbf{Z}^k$ und erzeugt durch die ersten $k$-Vektoren der kanonischen Basis von $\mathbf{R}^n$ ist. Es sei $X_{n,k} = \mathbf{R}^n / H_k$, mit der entsprechenden Quotiententopologie (wobei $H_k$ die Unterraumtopologie hat, die diskret ist). Sei $p \colon \mathbf{R}^n \to X_{n,k}$ die kanonische Projektion.

(a) Zeigen Sie, dass $p$ offen ist und dass der Graph der Äquivalenzrelation abgeschlossen ist. Folgern Sie, dass $X_{n,k}$ ein Hausdorff Raum ist. (Tipp: Verwenden Sie das Kriterium aus Aufgabe 3.)

(b) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$C = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid |t_i - x_i| \leq \frac{1}{4} \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

eine kompakte Umgebung von $x$ ist, so dass die Restriktion von $p$ auf $C$ injektiv ist.

(c) Leiten Sie her, dass $X_{n,k}$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

(d) Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $X_{n,k} \to (\mathbf{S}_1)^k \times \mathbf{R}^{n-k}$. (Tipp: Aufgabe 2 kann nützlich sein.)