

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 13

Version 1 (30. Mai)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im [Forum](#).

Freiwillige [Abgabe](#) bis **06. Juni 8:00**. Nachher kann selbstständig mit der [Lösung](#) verglichen werden.

Aufgabe 13.1 [Likelihood-Quotienten-Test]

- (a) Sei $\Theta = [0, \infty)$ und seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Exp}(\theta)$ unter P_θ . Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1$ und die Alternativhypothese $H_1 : \theta = 2$. Konstruiere den (c, q) -Neyman-Pearson-Test mit $c \geq 0$ und $q \in [0, 1]$.
- (b) Sei $\Theta = [0, 1]$ und seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$ unter P_θ . Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1/2$ und die Alternativhypothese $H_1 : \theta = 3/4$. Konstruiere den (c, q) -Neyman-Pearson-Test mit $c \geq 0$ und $q \in [0, 1]$.

Aufgabe 13.2 [Neyman-Pearson-Lemma]

Sei $\Theta = (0, \infty)$ und seien X_1, \dots, X_{10} unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Poisson}(\theta)$ unter P_θ .

- (a) Konstruiere einen Test¹ $\varphi(X)$ für die Nullhypothese $\Theta_0 = \{1/2\}$ und die Alternativhypothese $\Theta_1 = \{2\}$ mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.2$, der zudem die folgende Eigenschaft erfüllt: Kein anderer (randomisierter) Test $\varphi'(X)$ hat sowohl eine kleinere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art als auch eine kleinere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.
- (b) Bestimme die Macht des in (a) konstruierten Tests.
- (c) Begründe, weshalb der in (a) konstruierte Test die gewünschte Eigenschaft erfüllt.

Hinweis: Verwende, dass $X_1 + \dots + X_{10} \sim \text{Poisson}(10\theta)$ unter P_θ .

Aufgabe 13.3 [Zweiseitiger z -Test]

Die durchschnittliche Fahrzeit von Zürich nach Bellinzona mit einem Intercity-Zug beträgt 146 Minuten. Mit dem Cisalpino werden die folgenden Zeiten gemessen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
152	145	141	137	145	146	139	147	138

Wir nehmen an, dass diese Werte Realisierungen einer u.i.v. Stichprobe X_1, \dots, X_n sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ ein unbekannter Parameter und $\sigma^2 = 9$ ist. Führen Sie einen geeigneten Test durch, um auf dem 5%-Niveau festzustellen, ob die mittlere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercity abweicht.

¹Für diese Aufgabe sind nur klassische Tests und keine randomisierten Tests erlaubt.

Aufgabe 13.4 [z-Test und P-Wert]

Eine Klimaanlage schafft es, die Raumtemperatur bis auf eine Standardabweichung σ von 0.5 Grad Celsius konstant zu halten. Die angestrebte Raumtemperatur beträgt 20.00 Grad Celsius. An zehn aufeinanderfolgenden Tagen wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
20.71	19.76	20.56	21.39	21.00	19.67	20.92	20.31	20.39	20.72

Wir nehmen an, dass die gemessenen Temperaturen unabhängig voneinander und identisch normalverteilt sind.

- Führe einen geeigneten Test auf dem 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage wirklich auf den Sollwert von 20.00 Grad geeicht ist.
- Berechne den realisierten P-Wert.

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das [Forum](#) (oder eine Mail an [Jakob Heiss](#)).