# Wahrscheinlichkeit und Statistik

## Serie 2

Version 1 (7. März 2024)
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **12. März** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **14. März 8:00**. Nachher kann selbstständig mit der Lösung verglichen werden.

**Aufgabe 2.1 (Independences)** Alix has four books: a mathematics book, a biology book, a chemistry book and a mathematics-biology-chemistry book. Alix chooses one of the four books at random, with uniform probability. Denote by $M$, $B$ and $C$ the events "the chosen book has mathematics in it" (respectively biology, chemistry). Are the events $M$, $B$ and $C$ independent?

**Aufgabe 2.2 (Cylinders)** Sasha models coin tosses as follows. Let $\Omega = \{0,1\}^{\{1,2,3,\dots\}}$, so that an element of $\Omega$ is a sequence of 0 and 1's. For $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1} \in \Omega$ we interpret $\omega_k$ as the result of the $k$-th throw (1 for heads, 0 for tails). For all $k \geq 1$ and $u_1, \dots, u_k \in \{0,1\}$ we define the following set, called a cylinder:

$$C_{u_1,u_2,\dots,u_k} = \{(\omega_n)_{n\geq 1} : \omega_1 = u_1, \dots, \omega_k = u_k\}, \tag{1}$$

(1) Express (using unions, intersections and complements) the following events in terms of sets of type (1) :
  (a) $B_n$: "We get tails for the first time on the $n$th throw"
  (b) $A$ : "The result of the second throw is tails".
  (c) $C$: "You never get tails".
  (d) $D_n$: "you get tails at least twice in the first $n$ throws".

We assume the existence the existence of a probability P on $(\Omega, \mathcal{A})$, where $\mathcal{A}$ is the $\sigma$-field generated by sets of the form (1) (cylinder $\sigma$-algebra) such that

$$\mathrm{P}\left(C_{u_1,u_2,\dots,u_k}\right) = \frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

(2) Compute the probabilities of the previous events $A, B_n, C, D_n$.

**Aufgabe 2.3** Let $(A_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of independent events on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Show that

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \prod_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n).$$

**Aufgabe 2.4** Let $(\mathcal{F}_n)$ be a sequence of independent $\sigma$-fields and consider a bijection $\sigma\colon \{1,2,3,\dots\} \to \{1,2,3,\dots\}$. Show that $(\mathcal{F}_{\sigma(n)})$ is still a sequence of independent $\sigma$-fields.

**Aufgabe 2.5** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\Omega = [0,1)$ ist und P das Lebesgue-Mass auf der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{F} = \mathfrak{B}([0,1))$ ist. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Teil-$\sigma$-Algebra

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\mathcal{E}_n\right),$$

mit

$$\mathcal{E}_n := \left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) : k \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \right\}.$$

(a) Beweise, dass $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ gilt.

(b) Wie viele Elemente hat $\mathcal{F}_n$?
*Hinweis:* Verwende, dass $\mathcal{E}_n := \left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) : k \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \right\}$ eine Partition von $\Omega$ ist. Daraus kannst du folgern, dass sich jede Menge in $\mathcal{F}_n$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{E}_n$ dargestellt werden kann (und natürlich ist umgekehrt jede dieser Verneinungen auch in $\mathcal{F}_n$).

(c) Wir definieren

$$A_n = \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq 2^n - 1, \\ k \text{ gerade}}} \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right).$$

Zeichne $A_n$. Für welche $N \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \in \mathcal{F}_N$?

(d) Berechne $\mathrm{P}(A_n)$.

(e) Sei $m < n$. Beweise, dass

$$\forall A \in \mathcal{F}_m : \mathrm{P}(A \cap A_n) = \frac{1}{2} \mathrm{P}(A)$$

(f) Folgere daraus, dass $(A_n)_{n \geq 1}$ unabhängig sind.

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).