Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 3

Version 2 (15. März 2024: In Aufgaben 3.1 und 3.2 fehlten die Definitionen der Wahrscheinlichkeitsmasse, die jetzt hinzugefügt wurden. Tippfehler (zB im Index des Produkts in Aufgabe 3.2) wurden ausgebessert. Und Hinweise mit Links zu den Notizen 4 wurden hinzugefügt.), Version 1 (14. März)
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **19. März** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **21. März 8:00**. Nachher kann selbstständig mit der Lösung verglichen werden.

Aufgabe 3.1 Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlihckeitsraum auf $\Omega = \{0,1\}^2$ mit $\mathrm{P}(\cdot) = \frac{|\cdot|}{4}$.[1] Wir definieren die Zufallsvariable

$$\begin{aligned} X \colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) := \omega_1 + \omega_2. \end{aligned}$$

(a) Gib ein Beispiel einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf Ω, sodass X nicht messbar bezüglich $\mathcal{F}$ ist.

(b) Wie lautet die von X erzeugte σ-Algebra $\sigma(X)$?
Hinweis: Die Definition der erzeugten σ-Algebra ist in Notizen 4 (Seite 3).

(c) Wie lautet μ_X und F_X? Zeichne F_X.
Hinweis: Die Definitionen sind in Notizen 4 (Seite 10) und Notizen 4 (Seite 11).

Aufgabe 3.2 Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlihckeitsraum auf $\Omega = \{0,1\}^n$ mit $\mathrm{P}(\cdot) = \frac{|\cdot|}{2^n}$. Wir definieren die Zufallsvariable

$$\begin{aligned} Y \colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto Y(\omega) := \prod_{i=1}^{n} \omega_i. \end{aligned}$$

(a) Wie lautet die von Y erzeugte σ-Algebra $\sigma(Y)$?

(b) Wie lautet μ_Y und F_Y? Zeichne F_X.

Aufgabe 3.3 Let $(X_i)_{i\geq 1} : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ be random variables. Show that

$$\sigma\left(X_i : i \geq 1\right) = \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \ldots, X_k)\right).$$

Recall from Notes 4 (page 4) that $\sigma\left(X_i : i \geq 1\right)$ is the smallest σ-field on Ω for which all the X_i's are measurable and $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$ is the smallest σ-field on Ω for which $X_1, \ldots, X_k$ are measurable.

Aufgabe 3.4 **[σ-Algebren & Zufallsvariablen]**
Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$. Wir betrachten zwei verschiedene σ-Algebren:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \mathcal{P}(\Omega) \\ \mathcal{F}_{sym} &:= \{A \subseteq \Omega : \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, (\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A\} \end{aligned}$$

Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ enthält alle Teilmengen von Ω. In diesem Fall können wir also jedes Ergebnis des Zufallsexperiments beobachten, z.B. dass der blaue Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der grüne Würfel

[1] Wahrscheinlichkeitsräume der Form $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ mit $\mathrm{P}(\cdot) = \frac{|\cdot|}{|\Omega|}$ werden als Laplace-Modelle bezeichnet. Zu jedem endlichen Ω gibt es somit genau ein Laplace-Modell auf Ω. Z.B. der Wahrschienlihckeitsraum in Aufgabe 3.2 ist auch ein Laplace-Modell.

die Augenzahl 5. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_{sym}$ enthält nur symmetrische Teilmengen von Ω (mit Blick auf das Vertauschen der beiden Würfel). In diesem Fall können wir uns vorstellen, dass wir eine Brille tragen, die es uns nicht erlaubt, die Farben der Würfel zu erkennen. Wir können also beispielsweise beobachten, dass ein Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der andere die Augenzahl 5, aber nicht dass der Würfel mit der Augenzahl 3 blau ist.

(a) Zeige, dass $\mathcal{F}_{sym}$ eine σ-Algebra ist.
Hinweis: Überprüfe hierzu, dass die drei Eigenschaften aus der Definition einer σ-Algebra (siehe Notizen 2 (Seite 1)).

(b) Wir betrachten zwei Teilmengen von Ω:

$$A := \text{"Ein Würfel zeigt die Augenzahl 3"},$$
$$B := \text{"Der blaue Würfel zeigt die Augenzahl 3"}.$$

Zeige, dass $A \in \mathcal{F}_{sym}$, aber $B \notin \mathcal{F}_{sym}$.

(c) Wir betrachten die Abbildungen

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des blauen Würfels"}$$

$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augensumme der beiden Würfel"}$$

Zeige, dass X *keine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.
Zeige, dass S *eine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.

Aufgabe 3.5 [Verteilungsfunktion: Würfelwurf]
Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und das Wahrscheinlichkeitsmass P definiert durch

$$\mathrm{P}\left((\omega_1, \omega_2)\right) = 1/36, \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

Als Zufallsvariablen betrachten wir

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des blauen Würfels"}$$

$$X^2 : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto (\omega_1)^2 \end{cases} \qquad \text{"Das Quadrat der Augenzahl des blauen Würfels"}$$

$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augensumme der beiden Würfel"}$$

(a) Zeichne die Verteilungsfunktion von X.

(b) Zeichne die Verteilungsfunktion von X^2.

(c) Zeichne die Verteilungsfunktion von S.

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).